IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
7 SEPT. 1938

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JULIO 1938 — ENTREGA I. — TOMO CXXVI

SUMARIO

Pág.

MATEMATICAS:

JUAN CARLOS VIGNAUX. — Sobre integrales de Laplace y de Stieltjes asintóticas 1

FRANCISCO LA MENZA. — Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos (*Conclusión*) 19

CIENCIAS NATURALES:

CARLOS RUSCONI. — Sobre ejemplares juveniles del género « Scelidotherium » 33

WALTER KNOCHE. — Algunos apuntes sobre la producción del anhidrido carbónico antropógeno 41

CIENCIAS ECONOMICAS:

MAURICIO DURRIEU. — Cotejos económicos y selección económica (*Conclusión*) 47

CIENCIAS HISTORICAS:

ALBERTO M. SALAS. — Breve ensayo sobre Don Pedro de Cieza de León y los caracteres de la Conquista Incaica (*Continuación*) 67

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Philippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
Ing. Eduardo Huergo †
Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Walter Nernst
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Cristóbal M. Hicken †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Diculefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V .Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1938-1939)

Presidente	Ingeniero **Jorge W. Dobranich**
Vicepresidente 1º	Doctor **Ramón G. Loyarte**
Vicepresidente 2º	Doctor **Gonzalo Bosch**
Secretario de actas	Ingeniero **Raúl E. Dubecq**
Secretario de correspondencia	Doctor **Santiago Barabino Amadeo**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi**
Pro-tesorero	Profesor **José F. Molfino**
Bibliotecario	Ingeniero **Carlos A. Lizer y Trelles**
Vocales	Doctor **Claro C. Dassen**
	Doctor **Alfredo Sordelli**
	Doctor **Juan C. Vignaux**
	Doctor **Jorge Magnin**
	Doctor **Juan Ubaldo Carrea**
	Doctor **Reinaldo Vanossi**
	Ingeniero **Carlos Posadas**
	Ingeniero **Mario L. Negri**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc, se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SOBRE INTEGRALES DE LAPLACE Y DE STIELTJES ASINTÓTICAS

Por J. C. VIGNAUX

Introducción.— La representación asintótica de una función $f(z)$ real o compleja, mediante una serie de potencias del tipo

$$\sum_0^\infty a_n \frac{1}{z^n} \qquad [1]$$

se debe a H. Poincaré (1). En trabajos anteriores hemos propuesto su extensión a las series dobles de potencias (2)

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_{mn}}{z^m w^n}, \qquad [2]$$

y algunas generalidades de esta representación, sustituyendo las series de potencias [1] y [2] por series de Dirichlet y series de facultad simples y dobles (3).

En la presente memoria proponemos en cambio una representación asintótica de una función $f(z)$ mediante una integral de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx \quad (x \geq 0),$$

y de una integral de Stieltjes (4)

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x+z}\, dx,$$

donde $\varphi(x)$ es una función real $(x \geq 0)$.

(1) H. Poincaré, *Acta Math.*, t. 8 (1886).

(2) J. C. Vignaux, *Series dobles asintóticas*, Anales Soc. Científ. Argentina, Junio 1938.

(3) J. C. Vignaux, *Series asintóticas simple y doble de Dirichlet y de facultad.* (En curso de publicación).

(4) Véase: E. Borel, *Leçons sur les series divergentes*, París 1928.

Una vez introducida la nueva noción de *integral asintótica*, se prueban cuáles son las operaciones fundamentales que se pueden aplicar a una representación de este tipo.

Luego se extienden todos estos resultados a las funciones de dos variables representables asintóticamente mediante integrales dobles de Laplace.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xs-yw}\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Muchas de estas conclusiones se pueden generalizar a las integrales de Laplace-Stieltjes.

$$\int_0^\infty e^{-xs}\, d\,\psi\,(x)$$

las cuales fueron estudiadas por Widder y otros, desde el punto de vista de la convergencia.

Queda planteada la cuestión siguiente análoga al problema de E. Borel (1) relativo a las series asintóticas: *dada la función* $\varphi\,(x)$ *en el intervalo* $x \geq 0$, *existe siempre una función* $f\,(z)$ *de la variable compleja* z, *tal que tenga como representación asintótica la integral* [1]*?*

En otro lugar se estudia la transformada definida por integrales de Stieltjes simples o dobles:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi\,(x, y)}{(x + z)\,(y + w)}\, dx\, dy.$$

(1) E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, (Annales d'École Normale, 1895); T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris 1926.

I. Integrales asintóticas

2. Dada la función $f(z)$ holomorfa de la variable *compleja* z en el semi-plano $R(z) \geq 0$; diremos que la integral de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-zx}\, \varphi(x)\, dx$$

convergente o divergente, donde $\varphi(x)$ es una función real e integrable en todo intervalo $0 \leq x \leq a$, *representa a la función* $f(z)$ *asintóticamente*, si la expresión

$$\varepsilon_a(z) = e^{az}\left[f(z) - \int_0^a e^{-zx}\, \varphi(x)\, dx\right], \quad (a > 0) \qquad [1]$$

tiende a *cero* cuando $z \longrightarrow \infty$, para todo a *positivo*.

La [1] se puede escribir en la forma

$$f(z) = \int_0^a e^{-zx}\, \varphi(x)\, dx + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} \qquad \varepsilon_a(z) \longrightarrow 0, \quad (a > 0)\ ;$$

y esta correspondencia la expresaremos con la notación

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-zx}\, \varphi(x)\, dx\ .$$

La representación asintótica de una función $f(z)$, si existe, es única según el

Teorema I. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx \qquad\qquad f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, \psi(x)\, dx$$

y las funciones $\varphi(z)$ *y* $\psi(x)$ *son analíticas en el intervalo* $(0, a)$, $a > 0$; *se tiene:* $\varphi(z) \equiv \psi(z)$, *en dicha intervalo* [1].

[1] Este teorema no subsiste como me ha hecho notar gentilmente el Dr. C. Biggieri, si no se impone a la $\varphi(x)$ otra condición que su integrabilidad.

En efecto; por hipótesis

$$f(z) = \int_0^a e^{-xz}\,\varphi(x)\,dx + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} \quad , \quad \varepsilon_a(z) \longrightarrow 0$$

$$f(z) = \int_0^a e^{-xz}\,\psi(x)\,dx + \frac{\delta_a(z)}{e^{az}} \quad , \quad \delta_a(z) \longrightarrow 0$$

cuando $z \longrightarrow \infty$, para todo $a > 0$ y además

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty a_n z^n \quad , \quad \psi(z) = \sum_0^\infty b_n z^n .$$

La [1] y [2] se pueden escribir

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z_n \int_0^a e^{-xz}\,dx + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} = \frac{1-e^{-az}}{z} \sum_0^\infty a_n z^n + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} \qquad [1']$$

$$f(z) = \frac{1-e^{az}}{z} \sum_0^\infty b_n z^n + \frac{\delta_a(z)}{e^{az}}, \qquad [2']$$

de donde se deduce

$$0 = (1-e^{-az}) \sum_0^\infty (a_n - b_n)\, z^n + \frac{\eta_a(z)}{e^{az}}\, z, \qquad [3]$$

y haciendo ahora $z \longrightarrow \infty$, resulta

$$0 = a_0 - b_0 \quad \therefore \quad a_0 = b_0 .$$

Sustituyendo en [3] este valor, dividiendo por z y haciendo $z \longrightarrow \infty$, se tiene

$$0 = a_1 - b_1 \quad \therefore \quad a_1 = b_1 ,$$

y continuando este proceso, resulta entonces

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) ;$$

por tanto las funciones analíticas son idénticas.

3. Definida la correspondencia entre una función y la integral de Laplace del tipo anterior, probaremos ahora que esta correspondencia se conserva en las operaciones fundamentales.

Suma. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, a(x)\, dx$$

$$g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, b(x)\, dx$$

se tiene entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, c(x)\, dx$$

donde

$$c(x) = a(x) \pm b(x).$$

Por hipótesis

$$f(z) = \int_0^\alpha e^{-xz}\, a(x)\, dx + \varepsilon_\alpha(z).e^{-\alpha z},\quad \varepsilon_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

$$g(z) = \int_0^\alpha e^{-xz}\, b(x)\, dx + \delta_\alpha(z).e^{-\alpha z},\quad \delta_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

de aquí resulta

$$f(z) \pm g(z) = \int_0^\alpha e^{-xz}\,[a(x) \pm b(x)]\, dx + \eta_\alpha(z)\, e^{-xz}$$

y como

$$\eta_\alpha(z) = \varepsilon_\alpha(z) + \delta_\alpha(z) \longrightarrow 0 \quad (z \longrightarrow \infty)$$

el teorema queda demostrado.

PRODUCTO. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, a(x)\, dx$$

$$g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, b(x)\, dx$$

se tiene entonces

$$f(z) \,.\, g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz}\, c(x)\, dx$$

donde

$$c(x) = \frac{1}{2}\int_0^x a(t)\, b(x-t)\, dt$$

Por hipótesis

$$f(z) = \int_0^\alpha e^{-xz}\, a(x)\, dx + \frac{\varepsilon_\alpha(z)}{e^{\alpha z}} = F + \frac{\varepsilon}{e^{\alpha z}} \quad , \quad \varepsilon_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

$$g(z) = \int_0^\alpha e^{-xz}\, b(x)\, dx + \frac{\delta_\alpha(z)}{e^{\alpha z}} = G + \frac{\delta}{e^{\alpha z}} \qquad \delta_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

de donde

$$f(z) \,.\, g(z) = F \,.\, G + F\,\frac{\delta}{e^{\alpha z}} + G\,\frac{\varepsilon}{e^{\alpha z}} + \frac{\varepsilon \,.\, \delta}{e^{2\alpha z}} \qquad [1]$$

Además se tiene

$$F \,.\, G = \int_0^\alpha e^{-xz}\, a(x)\, dx \,.\, \int_0^\alpha e^{-yz}\, b(y)\, dy = \iint_D e^{-(x+y)z}\, a(x)\, b(y)\, dx\, dy$$

donde la integral doble está tomada sobre el cuadrado D de lado igual a α, situado en el plano (x, y).

Por otra parte

$$\iint_D e^{-(x+y)z}\, a(x) \,.\, b(y)\, dx\, dy = 2 \iint_T e^{-(x+y)z}\, a(x)\, b(y) \,.\, dx\, dy$$

donde T designa el triángulo $O\,(0, 0)$, $A\,(\alpha, 0)$, $B\,(0, \alpha)$.

Haciendo el cambio de variables definidas por las relaciones

$$x + y = \xi \quad , \quad y = \xi \,.\, \eta$$

es decir

$$x = \xi\,(1 - \eta) \quad , \quad y = \xi \,.\, \eta \qquad [2]$$

al dominio T del plano xy, le corresponde en el plano coordenado ξ, η un cierto rectángulo R; puesto que a la recta $x = 0$ corresponden las dos rectas $\xi = 0$, $\eta = 1$; a la recta $y = 0$ corresponden las dos rectas $\xi = 0$, $\eta = 0$ y al lado $x + y = \alpha$ le corresponde la recta $\xi = x$; los vértices del rectángulo R son, por tanto: $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(\alpha, 1)$, $(0, 1)$.

Como el jacobiano de la transformación

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix},$$

vale ξ; se tiene entonces

$$\iint_T e^{-(x+y)z}\, a\,(x)\,.\,b\,(y)\,dx\,dy = \iint_R e^{-\xi z}.\,\xi\,.\,a\,[\xi\,(1-\eta)]\,b\,(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \int_0^{\alpha} e^{-\xi z}.\,\xi\,d\xi \int_0^1 a\,[\xi\,(1-\eta)]\,b\,(\xi\,\eta)\,d\eta\,.$$

Es decir, poniendo $\xi = t$.

$$\iint_T e^{-(x+y)z}\,.\,a\,(x)\,b\,(y)\,dx\,dy = \int_0^{\alpha} e^{-tz}\,dt \int_0^t a\,(t-y)\,b\,(y)\,dy.$$

Por tanto

$$F\,.\,G = \int_0^{\alpha} e^{-tz}\,c\,(t)\,dt$$

donde

$$c\,(t) = \frac{1}{2}\int_0^t a\,(t-y)\,b\,(y)\,dy\,.$$

Según esto, la relación [1] resulta

$$e^{\alpha z}\left[f\,(z)\,.\,g\,(z) - \int_0^{\alpha} e^{-tz}\,c\,(t)\,dt\right] = F\,.\,\delta + G\,\varepsilon + \frac{\varepsilon\,.\,\delta}{e^{\alpha z}}$$

luego

$$\lim_{z\to\infty} e^{\alpha z}\left[f\,(z)\,.\,g\,(z) - \int_0^{\alpha} e^{-tz}\,c\,(t)\,dt\right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

DIVISIÓN. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-zx}\, a(x)\, dx$$

y

$$g(z) - m \sim \int_0^\infty e^{-zx}\, b(x)\, dx \qquad m \neq 0$$

resulta entonces

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim \int_0^\infty e^{-zx}\, \psi(x)\, dx$$

donde la función $\psi(x)$ *esta determinada por la ecuación integral de Volterra de segunda especie* (1).

$$a(x) = m\,\psi(x) + \int_0^x b(x-t)\,\psi(t)\, dt$$

cuyo *núcleo* es la función $b(x-t)$.

En efecto; por hipótesis

$$f(z) = \int_0^x e^{-zx}\, a(x)\, dx + \varepsilon(z)\,.\, e^{-\alpha z} = F + \varepsilon\,.\, e^{-\alpha z}\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$g(z) = m + \int_0^\alpha e^{-zx}\, b(x)\, dx + \delta(z)\, e^{-\alpha z} = (G+m) + \delta\, e^{-\alpha z}\,, \quad \delta \longrightarrow 0$$

luego

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{F}{G+m} + \eta(z) \qquad [2]$$

donde

$$\eta(z) = \frac{\dfrac{\varepsilon}{e^{\alpha z}} - \dfrac{F}{(G+m)}\,\dfrac{\delta}{e^{\alpha z}}}{(G+m) + \dfrac{\delta}{e^{\alpha z}}}\,;$$

por tanto $\eta(z) \longrightarrow 0$ cuando $z \longrightarrow \infty$.

(1) Véase: E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, T. III. p. 324. París (1905).

Determinemos una función $\psi(x)$ integrable en todo intervalo $(0, \alpha)$, y tal que

$$\frac{\int_0^\alpha e^{-xz}\, a(x)\, dx}{m + \int_0^\alpha e^{-xz}\, b(x)\, dx} = \int_0^\alpha e^{-yz}\, \psi(y)\, dy$$

es decir

$$\int_0^\alpha e^{-xz} a(x)\, dx = m \int_0^\alpha e^{-yz}\, \psi(y)\, dy + \int_0^\alpha \int_0^\alpha e^{-xz-yz}\, b(x)\, \psi(y)\, dx\, dy .$$

La integral doble que figura en el segundo miembro se transforma, según un proceso análogo al caso del producto. Resulta entonces

$$\int_0^\alpha e^{-xz} a(x)\, dx = m \int_0^\alpha e^{-xz}\, \psi(x)\, dx + \int_0^\alpha e^{-xz}\, dx \int_0^x b(x-t)\, \psi(t)\, dt$$

y poniendo

$$\theta(x) = \int_0^x b(x-t)\, \psi(t)\, dt$$

se tiene

$$\int_0^\alpha e^{-xz}\, a(x)\, dx = \int_0^\alpha e^{-xz} [m\, \psi(x) + \theta(x)]\, dx .$$

De aquí resulta según un conocido teorema (1)

$$a(x) = m\, \psi(x) + \int_0^x b(x-t)\, \psi(t)\, dt$$

ecuación integral que nos permite determinar la función $\psi(x)$ en función de $a(x)$ y $b(x)$.

Por tanto

$$\frac{F}{G+m} = \int_0^\alpha e^{-yz}\, \psi(y)\, dy ,$$

y la relación [2] se puede escribir

$$e^{\alpha z} \left[\frac{f(z)}{g(z)} - \int_0^\alpha e^{-yz}\, \psi(y)\, dy \right] = \eta(z)\, e^{\alpha z}$$

(1) Si las funciones integrales no son contínuas la igualdad se verifica salvo un conjunto de medida nula, según el teorema de LERCH-VITALI.

Teniendo presente que $\eta(z)\, e^{\alpha z} \longrightarrow 0$, se tiene entonces

$$\lim_{z \to \infty} e^{\alpha z}\left[\frac{f(z)}{g(z)} - \int_0^{\alpha} e^{-yz}\, \psi(y)\, dy\right] = 0$$

lo cual prueba el tecrema.

4. Integración. — *Si se tiene*

$$f(z) \sim \int_1^{\infty} e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx$$

resulta entonces

$$\int_z^{\infty} f(z)\, dz \sim \int_1^{\infty} e^{-xz}\, \frac{\varphi(z)}{x}\, dx\,.$$

Por hipótesis

$$f(z) = \int_1^{\alpha} e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx + \varepsilon(z)\,.\, e^{-\alpha z} \quad (\alpha > 1)$$

con $\varepsilon(z) \longrightarrow 0$ para $z \longrightarrow \infty$.

De aquí resulta

$$\int_z^{\infty} f(z)\, dz = \int_z^{\infty} dz \int_1^{\alpha} e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx + \int_z^{\infty} \frac{\varepsilon(z)}{e^{\alpha z}}\, dz$$

La primer integral del segundo miembro, se puede escribir

$$\int_z^{\infty} dz \int_1^{\alpha} e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_1^{\alpha} \varphi(x)\, dx \int_z^{\infty} e^{-xz}\, dz$$

desde que la permutación de la integración es legítima por ser la integral

$$\int_z^{\infty} e^{-xz}\, dz$$

uniformemente convergente para $x > 1$. En efecto, si ponemos $z = \xi + i\eta$ se tiene

$$\left|\frac{1}{e^{xz}}\right| = \frac{1}{e^{x\xi}} > \frac{1}{e^{\xi}} \quad \text{para} \quad x > 1$$

luego

$$\left| \int_m^\infty e^{-xz}\, dz \right| \leq \int_m^\infty |\, e^{-xz}\, dz\,| \leq \int_m^\infty e^{-\xi}\, d\xi = \frac{1}{e^m};$$

por tanto, fijando un $\varepsilon > 0$, existe un $\mu > 0$, tal que

$$\int_m^\infty e^{-xz}\, dz < \varepsilon \quad m \geq \mu$$

y para *todo* x del intervalo $(1, +\infty)$.

Además como

$$\int_z^\infty e^{-xz}\, dz = \frac{e^{-xz}}{x} \qquad (x > 0)$$

resulta entonces

$$\int_z^\infty dz \int_1^\alpha e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_1^\alpha e^{-xz}\, \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

luego

$$\int_z^\infty f(z)\, dz = \int_1^\alpha e^{-xz}\, \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \eta(z)\, e^{-az} \qquad [3]$$

donde

$$\eta(z) = e^{-az} \int_z^\infty \frac{\varepsilon(z)}{e^{az}}\, dz\,.$$

De la condición: $\varepsilon(z) \longrightarrow 0$ para $z \longrightarrow \infty$, a todo $\delta > 0$ arbitrario, corresponde un $m(\delta)$ tal que

$$|\, \varepsilon(z)\,| < \delta \quad \text{para} \quad |\, z\,| \geq m(\delta)$$

luego

$$|\, \eta(z)\,| < |\, e^{az}\,| \,.\, \delta \,.\, \int_z^\infty |\, e^{-az}\, dz\,| < \delta$$

por tanto

$$\eta(z) \longrightarrow 0 \quad z \longrightarrow \infty,$$

y teniendo en cuenta la relación [3], queda demostrado el teorema.

DERIVACIÓN. — *Si la función* $f(x)$ *y su derivada* $f'(x)$ *tienen los desarrollos asintóticos*

$$f(z) \sim \int_1^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx \qquad [1]$$

y

$$f'(z) \sim \int_1^\infty e^{-xz}\, \psi(x)\, dx \qquad [2]$$

entonces la integral [2] *es la derivada de la* [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración a la [2] resulta

$$\int_z^\infty f'(z)\, dz = -f(z) \sim \int_z^\infty e^{-xz}\, \frac{\psi(x)}{x}\, dx\,,$$

o sea

$$\int_1^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_1^\infty e^{-xz} \left(-\frac{\psi(x)}{x}\right) dx$$

por tanto debe ser

$$\varphi(x) = -\frac{\psi(x)}{x}$$

$$\psi(x) = -x\, \varphi(x)\,.$$

Además

$$\frac{d}{dz}\left[\int_1^\infty e^{-xz}\,.\,\varphi(x)\,.\,dx\right] = \int_1^\infty \frac{d}{dz}\left[e^{-xz}\,\varphi(x)\,.\,dx\right]$$

$$= \int_1^\infty e^{-xz}\,.\,(-x\,.\,\varphi(x)\,.\,dx = \int_1^\infty e^{-xz}\,.\,\psi(x)\,.\,dx\,,$$

de donde resulta la proposición.

II. INTEGRALES DOBLES ASINTÓTICAS

5. Las definiciones y los teoremas que hemos dado en la primera parte, se extienden a las integrales dobles en la siguiente forma.

Dada la función $f(z, w)$ de las variables complejas z, w en la semi-planos asociados: $R(z) \geq 0$, $R(w) \geq 0$; diremos que la integral doble de Laplace

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

convergente o no, donde $\varphi(x, y)$ es una función real de x e y integrable en todo rectángulo $(0 \leq x \leq a \;\; 0 \leq y \leq b)$ la representa asintóticamente si la expresión

$$\varepsilon_{a,b}(x, y) = e^{az+bw}\left[f(z, w) - \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy\right] \quad [1]$$

tiende a *cero*, cuando z y w tienden a infinito *simultanea e independiente*, para todo $(a > 0,\; b > 0)$.

La [1] equivale a poner

$$f(z, w) = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy + \varepsilon(x, y)\,e^{-az-bw}$$

con

$$\varepsilon(x, y) \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow \infty .$$

En este caso, pondremos

$$f(z, w) \sim \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy .$$

La representación asintótica de una función $f(z, w)$ si existe, es única. En efecto; supongamos

$$f(z, w) = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y) + \frac{\varepsilon(z, u)}{e^{az+bw}} \quad , \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$f(z, w) = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\psi(x, y) + \frac{\delta(z, w)}{e^{az+bw}} \quad , \quad \delta \longrightarrow 0$$

y que las funciones $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *sean analíticas*

$$\varphi(x, y) = \sum\sum a_{mn}\,x^m\,y^n \quad , \quad \psi(x, y) = \sum\sum b_{mn}\,x^m\,y^n .$$

De aquí resulta

$$f(z, w) = \frac{(1 - e^{-az})(1 - e^{-bw})}{zw} \sum\sum a_{mn} z^m w^n + \frac{\varepsilon}{e^{ab+bw}}$$

$$f(z, w) = \frac{(1 - e^{-ab})(1 - e^{-bw})}{zw} \sum\sum b_{mn} z^m w^n + \frac{\delta}{e^{az+bw}}$$

de donde resulta, por recurrencia (1) que

$$a_{m,n} = b_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

luego las funóiones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son analíticas.

6. Ocupémonos de las operaciones fundamentales algebraicas.

Si

$$f(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} a(x, y)\, dx\, dy \qquad [1]$$

y

$$g(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} b(x, y)\, dx\, dy \qquad [2]$$

se tiene

$$f(z, w) \pm g(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} c(x, y)\, dx\, dy$$

donde

$$c(x, y) = a(x, y) \pm b(x, y).$$

Se prueba como en el caso de una variable.

Si las funciones tienen los desarrollos asintóticos [1] *y* [2]; *se tiene entonces*

$$f(z, w) \cdot g(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-wy} c(x, y)\, dx\, dy\,,$$

donde

$$c(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y a(t, u)\, b(x - t, y - u)\, dt\, du\,.$$

Por hipótesis

$$f(z, w) = F + \varepsilon e^{-az-bw} \quad , \quad g(z, w) = G + \delta e^{-az-bw}$$

donde

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad , \quad \delta \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow \infty$$

(1) Véase: J. C. Vignaux, *Sobre series doble asintóticas* anteriormente citado.

Además

$$F \,.\, G = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, a\,(x, y)\, dx\, dy \,.\, \int_0^a\int_0^b e^{-\alpha z-\beta w}\, b\,(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_0^a\int_0^a dx\, d\alpha \int_0^b\int_0^b e^{-(x+\alpha)z}\, e^{-(y+\beta)w}\, a\,(x, y)\, b\,(\alpha, \beta)\, dy\, d\beta\,.$$

Razonando del mismo modo que en el caso anterior de una variable y con el cambio de variables

$$x + \alpha = \xi \quad \alpha = \xi\,\eta\ ,\ y + \beta = \xi'\ ,\ \beta = \xi'\,\eta'$$

resulta finalmente

$$F \,.\, G = \int_0^a\int_0^b e^{-tz-wu}\, c\,(t, u)\, dt\, du$$

donde

$$c\,(t, u) = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^u a\,(t, u)\, b\,(x - t, y - u)\, dt\, du\,.$$

Por tanto

$$e^{az-bw}\left[f\,(z, w)\, g\,(z, w) - \int_0^a\int_0^b e^{-tz-uw}\, c\,(t, u)\, dt\, du\right] =$$

$$= F\,.\,\delta + G\,\varepsilon + \varepsilon\,.\,\delta\, e^{-az-bz} \longrightarrow 0$$

cuando $(z, w) \longrightarrow \infty$.

Si las funciones

$$f\,(z, w) \quad \text{y} \quad g\,(z, w) + m \quad (m \neq 0)$$

tienen por desarrollo asintótico las integrales dobles [1] *y* [2]; *se tiene*

$$\frac{f\,(z, w)}{g\,(z, w)} \sim \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-zx-wy}\, w\,(x, y)\, dx\, dy$$

donde $w\,(x, y)$ *es solución de la ecuación integral de Volterra.*

$$a\,(x, y) = m\, w\,(x, y) + \int_0^x\int_0^y b\,(x - t, y - u)\,.\, w\,(t, u)\, dt\, du\,. \quad [3]$$

Por hipótesis

$$f\,(z, w) = F + \varepsilon\, e^{-az-bw} \quad ,\quad g\,(z, w) = b + m + \delta\, e^{-az-bw}$$

de donde

$$\frac{f\,(z, w)}{g\,(z, w)} = \frac{F}{G + m} + \eta \quad \text{donde} \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow 0$$

Pongamos

$$\frac{\int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, a\,(x,y)\,dx\,dy}{m+\int_0^b e^{-xz-yw}\, b\,(x,y)\,dx\,dy} = \int_0^a\int_0^b e^{-\alpha z-\beta w}\, w\,(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

de donde

$$\int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, a\,(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,[m\,w\,(x,y)+\eta\,(x,y)]\,dx\,dy$$

con

$$\eta\,(x,y) = \int_0^x\int_0^y b\,(x-t,\,y-u)\,w\,(t,u)\,dt\,du$$

y de aquí resulta que $w\,(\alpha,\beta)$ debe ser solución de la ecuación integral [3].

Por tanto

$$e^{az+bw}\left[\frac{f\,(z,w)}{g\,(z,w)} - \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, w\,(x,y)\,dx\,dy\right] \longrightarrow 0$$

cuando $(z,w) \longrightarrow 0$.

7. El teorema de la integración y derivación se extiende también de la siguiente manera:

Si

$$f\,(z,w) \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\,\varphi\,(x,y)\,dx\,dy$$

es entonces

$$\int_z^\infty\int_w^\infty f\,(z,w)\,dz\,dw \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\,\frac{\varphi\,(x,y)}{xy}\,dx\,dy$$

De la hipótesis resulta

$$\int_z^\infty\int_w^\infty f\,(z,w)\,dz\,dw = \int_1^\infty\int_w^\infty dz\,dw\int_1^a\int_1^b e^{-xz-yw}\,\varphi\,(x,y)\,dx\,dy +$$

$$+\int_z^\infty\int_w^\infty \frac{\varepsilon\,(z,w)}{e^{az+bw}}\,dz\,dw \quad , \quad \varepsilon\,(z,w)\longrightarrow 0\,. \qquad [4]$$

Además, la primera integral doble del segundo miembro se puede escribir

$$\int_1^a\int_1^b \varphi\,(x, y)\,dx\,dy \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\,dz\,dw = \int_1^a\int_1^b \frac{\varphi\,(x, y)}{x, y}\,dx\,dy$$

puesto que la integral doble

$$\int_z^\infty\int_w^\infty e^{-xz-yw}\,dx\,dy$$

converge uniformemente a su límite:

$$\frac{e^{-xz-yw}}{x\,.\,y}$$

para todo $(x > 1,\ y > 1)$.

De la condición: $\varepsilon\,(z, w) \longrightarrow 0$, resulta que a todo $\delta > 0$ arbitrario corresponde un $m\,(\delta)$ tal que

$$|\,\varepsilon\,(z, w)\,| < \delta \quad \text{para} \begin{cases} |\,z\,| > m\,(\delta) \\ |\,w\,| > m\,(\delta) \end{cases}$$

luego

$$\eta\,(z, w) = \int_z^\infty\int_w^\infty \frac{\varepsilon\,(z, w)}{e^{az+bw}}\,dz\,dw \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow \infty\,.$$

Teniendo en cuenta la [4] y las conclusiones anteriores, el teorema queda demostrado.

Finalmente:

Si

$$f\,(z, w) \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\,\varphi\,(x, y)\,dx\,dy \qquad [1]$$

y

$$f_z' \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\,\psi\,dx\,dy\,, \qquad [2]$$

$$f_w' \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\,\psi_1\,dx\,dy \qquad [3]$$

$$f_{zw}'' \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\,\psi_2\,dx\,dy \qquad [4]$$

entonces las integrales [2], [3] *y* [4] *son las derivadas parciales de la* [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración a las series [2], [3] y [4] resulta sucesivamente

$$f(z, w) \sim -\int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw} \frac{\psi \cdot (x, y)}{x}\, dx\, dy .$$

$$f(z, w) \sim -\int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw} \frac{\psi_1 (x, y)}{y}\, dx\, dy .$$

$$f(z, w) \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw} \frac{\psi_2 (x, y)}{xy}\, dx\, dy ,$$

por tanto

$$\varphi(x, y) = -\frac{\psi (x, y)}{x} \quad \therefore \quad \psi (x, y) = -x\, \varphi (x, y)$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{\psi_1 (x, y)}{y} \quad \therefore \quad \psi_1 (x, y) = -y\, \varphi (x, y)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\psi_2 (x, y)}{xy} \quad \therefore \quad \psi_2 (x, y) = x\, y\, \varphi (x, y)$$

y las funciones $\psi(x, y)$, $\psi_1(x, y)$ y $\psi_2(x, y)$ son respectivamente las derivadas parciales de

$$e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)$$

respecto de z, de w y de z, w.

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

*(Conclusión *)*

Se deduce inmediatamente que:

III) *Dos cadenas no idénticas iguales tienen el mismo orden, la misma clase, el mismo número de permanencias, las mismas eventuales singularidades, y sus respectivos grupos, los mismos números característicos.*

En dos cadenas iguales, llamaremos *filas homólogas* y *permanencias homólogas*, a aquéllas que se corresponden en la sustitución σ, que transforma una cadena en la otra.

De (26, IV), resulta:

IV) *Todas las cadenas elementales del mismo orden son iguales entre sí.*

En particular, puesto que las cadenas unitarias cerradas son, (26, V), elementales:

V) *Todas las cadenas unitarias cerradas, son iguales entre sí; como también las cadenas unitarias abiertas,* porque estas últimas constan de una sola permanencia.

Por la misma razón:

VI) *Dos permanencias no idénticas regulares del mismo orden, son iguales;* pues sus componentes, (26, II), forman una cadena elemental.

VII) *Todas las cadenas binarias cerradas de igual clase, son iguales entre sí.*

En efecto, por su definición, (24), en este caso el conjunto de las permanencias de la cadena implica una ordenación cíclica de sus filas. Sea entonces:

$$C_2\,(m,\,n) = \{a_1\,a_2\}\,\{a_2\,a_3\}\,\ldots\,\{a_{m-1}\,a_m\}\,\{a_m\,a_1\}\,.$$

(*) Ver *Anales S. C. A.*, Mayo 1938, Entrega V, Tomo CXXV.

A esta cadena corresponde la ordenación

$$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m .$$

Cualquier otra cadena binaria cerrada $C_2'(m, n)$ de estas mismas filas, implica otra ordenación:

$$a_{\nu_1} a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_{m-1}}, a_{\nu_m} .$$

Por consiguiente, la sustitución,

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \ldots & a_{\nu_{m-1}} & a_{\nu_m} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m \end{pmatrix},$$

transforma $C_2(m, n)$, en $C_2'(m, n)$.

También,

VIII) *Son iguales entre sí todas las cadenas binarias cerradas que tienen el mismo número de permanencias*; puesto que en tal caso tienen, (29), la misma clase.

IX) *Si dos cadenas son iguales y una de ellas tiene derivada de un dado orden con respecto a un grupo de filas, la otra también tiene derivada del mismo orden, con respecto al grupo homólogo, y ambas cadenas derivadas también son iguales.*

Puesto que las dos cadenas dadas son iguales, existe una sustitución σ, entre todas las filas de una de ellas, que la transforma en la otra. Como, (34), la cadena derivada se obtiene suprimiendo, en las permanencias que las contienen, las filas con respecto a las cuales se deriva, y en la correspondencia σ, las filas homólogas también pertenecen a las permanencias homólogas en la otra cadena, ésta admite, por lo tanto, la derivada con respecto al grupo homólogo de filas dadas. En consecuencia, dicha derivada resulta del mismo orden que su homóloga. Pero ambas cadenas derivadas son, además, iguales. En efecto, una sustitución σ' que transforma una de ellas en la otra, se obtiene de la misma sustitución σ, suprimiendo en ésta los dos grupos homólogos de filas consideradas y, además, todas las otras filas que no pertenecen a las dos cadenas derivadas.

Ejemplo 3:

Así, las cadenas derivadas, con respecto a las filas 1, 2 y a sus homólogas 3, 2 en la sustitución σ que transforma C en C' del *ejemplo 2*, de este número son:

$$\mathcal{D}_{1,2}\, C = \{34\}\ \{46\}\ \{63\},$$

$$\mathcal{D}_{2,3}\, C' = \{15\}\ \{54\}\ 41\}.$$

Una sustitución σ', que transforma la primera de éstas en la segunda, es,

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1\ 5\ 4 \\ 3\ 4\ 6 \end{pmatrix},$$

que se obtiene suprimiendo en σ, las filas 1, 2, 5 y sus homólogas 3, 2, 6.

X) *En dos cadenas iguales, a cada par asociado de cadenas derivadas en una de ellas, corresponde un par asociado de cadenas derivadas respectivamente iguales a las dadas, en la otra.*

Sean C y C' las dos cadenas iguales y [36.2], σ, la sustitución que transforma C en C'. Sea, además, $\mathcal{D}_{a_i} C$ y $\mathcal{D}_{a_j} C$ el par asociado en C. Se debe tener, (35, X),

$$\mathcal{D}_{a_j}(\mathcal{D}_{a_i} C) = \mathcal{D}_{a_i}(\mathcal{D}_{a_j} C).$$

Pero, por ser $C = C'$, resulta (IX):

$$\mathcal{D}_{a_i} C = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C',$$

$$\mathcal{D}_{a_j} C = \mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C',$$

y también,

$$\mathcal{D}_{a_j}(\mathcal{D}_{a_i} C) = \mathcal{D}_{a_{\nu_j}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C')$$

$$\mathcal{D}_{a_i}(\mathcal{D}_{a_j} C) = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C').$$

Luego:

$$\mathcal{D}_{a_{\nu_j}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C') = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C');$$

lo que prueba, (35, X), la proposición.

Veamos cómo son las correspondientes sustituciones, en este caso. La primera de las igualdades escritas significa que la cadena $\mathcal{D}_{a_i} C$ contiene a la fila a_j y que, viceversa, la $\mathcal{D}_{a_j} C$ contiene a la fila a_i. Por lo tanto, las sustituciones σ_j y σ_i que transforman a $\mathcal{D}_{a_j} C$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C'$ y $\mathcal{D}_{a_i} C$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C'$, contienen respectivamente a las filas a_i y a_j. En cambio, una cualquiera de las dos penúltimas igualdades expresa que de ambas sustituciones σ_i y σ_j se deduce una misma sustitución $\sigma_{i,j}$ que transforma la cadena $\mathcal{D}_{a_j}(\mathcal{D}_{a_i} C)$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_j}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C')$, suprimiendo en σ_i la fila a_j, las que no figuran en la cadena y sus homólogas; o en σ_j, la fila a_i, las que no figuran en la cadena y sus homólogas. Por lo tanto:

XI) *Las dos sustituciones que transforman pares asociados de cadenas derivadas, en pares asociados, en dos cadenas iguales tienen, por lo menos, una fila. Las filas comunes en ambas sustituciones tienen*

las mismas homólogas y la fila de una derivada pertenece a la sustitución que transforma a la otra derivada.

Así, pues, ellas son, respectivamente, de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_i = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \dots & a_{\nu_{i-1}} & a_{\nu_{i+1}} & \dots & a_{\nu_j} & \dots & a_{\nu_p} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{i-1} & a_{i+1} & \dots & a_j & \dots & a_p \end{pmatrix}, \\ \\ \sigma_j = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \dots & a_{\nu_{j-1}} & a_{\nu_{j+1}} & \dots & a_{\nu_i} & \dots & a_{\nu_q} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{j-1} & a_{j+1} & \dots & a_i & \dots & a_q \end{pmatrix}. \end{array}\right. \qquad [36.3]$$

Ejemplo 4:

Sean C y C' las dos cadenas iguales del *ejemplo 2*, de este número y una sustitución, $\sigma = \begin{pmatrix} 3\,2\,1\,5\,6\,4 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \end{pmatrix}$ que transforma C en C'.

Las dos cadenas derivadas siguientes:

$$\mathcal{D}_1 C = \{234\}\,\{236\}\,\{246\}\,\{346\} \quad \text{y}$$
$$\mathcal{D}_2 C = \{134\}\,\{136\}\,\{146\}\,\{345\}\,\{356\}\,\{456\},$$

son asociadas en C. Pues

$$\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1 C) = \{34\}\,\{46\}\,\{63\},$$
$$\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2 C) = \{34\}\,\{46\}\,\{63\}.$$

Las cadenas respectivamente iguales a éstas en C', resultan:

$$\mathcal{D}_3 C' = \{215\}\,\{214\}\,\{254\}\,\{154\},$$
$$\mathcal{D}_2 C' = \{315\}\,\{314\}\,\{354\}\,\{156\}\,\{164\}\,\{564\},$$
$$\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_3 C') = \{15\}\,\{54\}\,\{41\},$$
$$\mathcal{D}_3(\mathcal{D}_2 C') = \{15\}\,\{54\}\,\{41\}.$$

Ellas son también asociadas en C'. Las sustituciones σ_1 y σ_2 que transforman respectivamente $\mathcal{D}_1 C$ en $\mathcal{D}_3 C'$ y $\mathcal{D}_2 C$ en $\mathcal{D}_2 C'$ son:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2\,1\,5\,4 \\ 2\,3\,4\,6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 3\,1\,5\,6\,4 \\ 1\,3\,4\,5\,6 \end{pmatrix}.$$

37. **Criterios de igualdad de cadenas.**—En el número precedente hemos dado algunos criterios muy simples de igualdad para el caso particular de las cadenas elementales y de las cadenas unitarias y binarias; veremos aquí algunos criterios para las cadenas generales.

I) *Dos cadenas son iguales si se cumplen, a la vez, las tres condiciones siguientes:*

a) Tienen las mismas eventuales singularidades;

b) a cada cadena derivada de primer orden en una de ellas, corresponde una cadena derivada de primer orden igual en la otra;

c) si dos derivadas de primer orden en una de ellas, tienen una fila común, sus correspondientes en la otra también tienen una fila común.

Por tener las mismas singularidades e iguales cadenas derivadas de primer orden, tienen, (III), el mismo orden y la misma clase. Sean C y C' ambas cadenas y $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots a_j, \ldots a_m$, sus filas. Designando con a_{ν_i} la fila homóloga en C' de a_i, respecto de las cuales ambas derivadas de primer orden son iguales, se debe tener, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, m$,

$$\mathcal{D}a_i\, C = \mathcal{D}a_{\nu_i}\, C' .$$

Luego, existen m sustituciones;

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \ldots & a_{\nu_{i-1}} & a_{\nu_{i+1}} & \ldots & a_{\nu_p} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{i-1} & a_{i+1} & \ldots & a_p \end{pmatrix},$$

tales que,

$$\sigma_i\, \mathcal{D}a_i\, C \equiv \mathcal{D}a_{\nu_i}\, C' .$$

Para probar la igualdad de las dos cadenas será preciso demostrar la existencia de una sustitución σ, entre las m filas dadas, tal que:

$$\sigma\, C \equiv C' .$$

Para ello, basta observar, en primer lugar, que, si dos sustituciones σ_i y σ_j de las m dadas, tienen una fila común a_s, ésta tiene en σ_i y en σ_j una misma fila homóloga a_{ν_s}. En efecto, si a_s es una fila común a las cadenas $\mathcal{D}a_i\, C$ y $\mathcal{D}a_j\, C$, por la condición c), sus respectivas homólogas, $\mathcal{D}a_{\nu_i}\, C'$ y $\mathcal{D}a_{\nu_j}\, C'$, tienen también una fila común a_{ν_s}. Luego, dichos pares de cadenas admiten derivadas relativas a a_s y a a_{ν_s} respectivamente, para las cuales se tiene:

$$\mathcal{D}a_s\, (\mathcal{D}a_i\, C) = \mathcal{D}a_{\nu_s}\, (\mathcal{D}a_{\nu_i}\, C')$$
$$\mathcal{D}a_s\, (\mathcal{D}a_j\, C) = \mathcal{D}_{a\nu s}\, (\mathcal{D}a_{\nu_j}\, C') .$$

Esto implica, a su vez, por definición de cadenas iguales, que:

$$\sigma'_i \cdot \mathcal{D}a_s\,(\mathcal{D}a_i\,C) \equiv \mathcal{D}a_{\nu_s}\,(\mathcal{D}a_{\nu_i}\,C'),$$
$$\sigma'_j \cdot \mathcal{D}a_s\,(\mathcal{D}a_j\,C) \equiv \mathcal{D}a_{\nu_s}\,(\mathcal{D}a_{\nu_j}\,C').$$

Pero σ'_i no es otra que la sustitución σ_i en la cual se ha suprimido la fila a_s y las que no figuran en la derivada, por lo tanto, su homóloga en σ_i, es a_{ν_s}. Por la misma razón esta fila es también homóloga de a_s en σ_j.

Siendo así, mediante las m sustituciones σ_i dadas, es siempre posible formar una sustitución σ, entre las m filas, conservando en cada una, las filas que son homólogas, hasta agotarlas todas, puesto que cada fila pertenece, por hipótesis, necesariamente a alguna sustitución σ_i. La igualdad de las dos cadenas resulta, (36), de la existencia de la sustitución σ, del hecho de tener ambas cadenas las mismas singularidades y de (34, XII).

II) *Dos cadenas son iguales si se cumplen, a la vez, las tres condiciones siguientes*:

a) *Tienen las mismas eventuales singularidades*;

b) *a cada cadena derivada de primer orden en una de ellas, corresponde una cadena derivada de primer orden igual en la otra*;

c) *a cada par asociado de cadenas derivadas en una de ellas, corresponde un par asociado de cadenas derivadas respectivamente iguales en la otra.*

Con las mismas notaciones del teorema precedente, se tiene:

$$\mathcal{D}a_i\,C = \mathcal{D}a_{\nu_i}\,C',$$
$$\mathcal{D}a_j\,C = \mathcal{D}a_{\nu_j}\,C',$$

en donde, por hipótesis, las dos cadenas de cada miembro son respectivamente asociadas en C y en C'. Luego (34, X):

$$\mathcal{D}a_j\,(\mathcal{D}a_i\,C) = \mathcal{D}a_i\,(\mathcal{D}a_j\,C)$$

y

$$\mathcal{D}a_{\nu_j}\,(\mathcal{D}a_{\nu_i}\,C') = \mathcal{D}a_{\nu_i}\,(\mathcal{D}a_{\nu_j}\,C')$$

En virtud de (36, IX), resulta, además:

$$\mathcal{D}a_j\,(\mathcal{D}a_i\,C) = \mathcal{D}a_{\nu_j}\,(\mathcal{D}a_{\nu_i}\,C'),$$
$$\mathcal{D}a_i\,(\mathcal{D}a_j\,C) = \mathcal{D}a_{\nu_i}\,(\mathcal{D}a_{\nu_j}\,C').$$

En consecuencia, estas relaciones prueban que las sustituciones σ_i y σ_j que transforman respectivamente $\mathcal{D}_{a_i} C$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C'$ y $\mathcal{D}_{a_j} C$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C'$, son de la forma [36.3].

Pero, (34, XI), a cada cadena derivada corresponde una asociada. Repitiendo, entonces, las mismas consideraciones para cada par de asociadas, se obtienen sustituciones del tipo indicado, con las cuales se compone una sustitución σ, como en el teorema precedente.

Nota: Las condiciones impuestas son todavía superabundantes en lo referente al número de derivadas iguales de primer orden. Basta sólo la de algunas. Sería interesante investigar el menor número que es preciso dar para que se verifique la igualdad.

38. **Forma de las figuras poliédricas convexas.** — La noción de cadena, (24), nos va a proporcionar el modo más natural de definir, por abstracción, el concepto de *forma de una figura poliédrica convexa.*

Recordemos, (8), que a todos los resolventes principales de un sistema $S_h(m, n)$, corresponde una *figura*, y que las *figuras* que constituyen el *contorno* de ella, *vértices, aristas, caras*, etc., se obtienen considerando, (10), los resolventes principales de sus sistemas subordinados. Pero éstos corresponden, a su vez, (34), a las cadenas derivadas de la cadena a que pertenece, (32, III), el dado sistema. Diremos que dichas figuras son las *figuras derivadas* de orden $s \leq h$ de la figura considerada, puesto que, (32, IV), a estas cadenas derivadas corresponden sistemas subordinados compatibles de igual orden del sistema dado. En particular, las figuras derivadas de primer orden, son las *caras* de la dada. Las de orden h son los *vértices.*

Diremos que dos o más sistemas $S_h(m, n)$ son del *mismo tipo*, si pertenecen a una misma cadena o a cadenas iguales. En caso contrario se dirán de *distintos tipos.* Cuando dos o más sistemas son del mismo tipo, diremos que las figuras definidas por sus respectivos resolventes principales, pertenecen a la misma *forma poliédrica convexa*, o, brevemente, *tienen la misma forma.* En caso contrario se dirá que pertenecen a *formas distintas.*

La forma de una figura poliédrica convexa es un ente abstracto que representa a todos los sistemas de un mismo tipo. Ella está, pues, dada por una cadena C y por todas las cadenas iguales a ésta. La cadena constituye, de este modo, la expresión *analítica* de la forma, la cual es *invariante* en las sustituciones entre todas las filas que la definen.

La clase y el orden de la cadena se llaman, respectivamente, *clase* y *dimensión* de la forma. Esta última designación está justificada por la siguiente razón: Si $C_h\,(m, n)$ es la cadena que define la forma considerada, todas las cadenas iguales a ella, (36), pueden tener dimensiones distintas pero no inferiores a su orden h, el cual es, (8), la dimensión del espacio de pertenencia de las correspondientes figuras particulares.

Así, pues, desde este punto de vista, un polígono convexo y un prisma también convexo con tantas caras como lados tiene el polígono, pertenecen a la misma *forma*, siendo, en cambio, *figuras distintas*.

No habría inconveniente en definir la forma exigiendo que las cadenas iguales tengan además igual dimensión, pero es más cómodo hacerlo sin este último requisito. Está demás hacer notar aquí, que la forma así definida es independiente de toda relación métrica entre los elementos de las figuras. Sólo depende, como en las cadenas, del modo según el cual se asocian entre sí para constituirla.

Resulta:

I) *Todas las figuras correspondientes a cadenas elementales del mismo orden, pertenecen a la misma forma*; puesto que, (36, IV), dichas cadenas son iguales entre sí.

De (36, V), resulta directamente:

II) *Todos los sistemas unitarios de igual clase son del mismo tipo.*

En particular, si son unidimensionales sus figuras son, (14), respectivamente segmentos o semirrectas según que sus cadenas tengan dos o una permanencia. Luego:

III) *Todos los segmentos pertenecen a la misma forma, como también todas las semirrectas.*

Del mismo modo, (36, VII):

IV) *Todos los sistemas binarios pertenecientes a cadenas binarias cerradas de igual clase, son del mismo tipo.*

Cuando la dimensión de estos sistemas binarios es igual a dos, sus figuras son polígonos convexos, luego:

V) *Todos los polígonos convexos de igual número de lados pertenecen a la misma forma.*

Según las precedentes definiciones, dar una forma F, de clase m y de dimensión h, equivale a dar una cadena $C_h\,(m, n)$ de clase m, de orden h y de cualquier dimensión $n \geq h$ y el conjunto de todas las cadenas iguales a ella. Una cualquiera de éstas define la misma forma F.

Las cadenas derivadas de orden s, con respecto a grupos de s filas homólogas de dos cualesquiera del conjunto de esas cadenas iguales son, (36, IX), también cadenas iguales. La correspondiente forma F' definida por este conjunto de cadenas iguales de orden s, se llama *forma derivada de orden s de la dada forma* F, con respecto al grupo g de filas consideradas o de cualquier grupo homólogo a él. La indicaremos con la notación

$$F' = \mathcal{D}_g F,$$

análoga a la usada para las cadenas. Como la derivación de formas se reduce a la de cadenas, goza de las mismas propiedades de aquella operación.

VI) *Si dos figuras pertenecen a una misma forma* F, *y una de ellas admite la figura derivada de un dado orden con respecto a un grupo de filas, la otra también admite la figura derivada del mismo orden con respecto al grupo homólogo, y ambas figuras derivadas pertenecen a la misma forma, la cual se obtiene derivando la* F *con respecto a dichas filas.*

Es consecuencia inmediata de las precedentes definiciones y de (36, IX).

En virtud de (34, V, VI), las figuras derivadas de una figura, corresponden a las cadenas derivadas del mismo orden de la cadena a que pertenecen los sistemas que la definen, y recíprocamente. Pero, (34, VIII y IX), a sistemas subordinados contiguos corresponden pares de cadenas asociadas y viceversa. Por lo tanto, dos figuras derivadas de primer orden de una misma figura de sistemas de característica $h > 1$, son *contiguas en ella*, si las correspondientes cadenas derivadas son asociadas en la cadena a que pertenecen dichos sistemas.

De (36, X) se tiene directamente:

VII) *En dos figuras pertenecientes a la misma forma, a cada par de figuras contiguas en una de ellas corresponde un par de figuras también contiguas en la otra. Dichos pares homólogos, pertenecen, a su vez, cada uno, a una misma forma.*

Este teorema asegura que el concepto de forma definido aquí por abstracción coincide con la imagen intuitiva que tenemos de dicha noción, puesto que conserva la contigüidad de los elementos del contorno en las figuras que pertenecen a una misma forma.

Los criterios generales de igualdad de cadenas dados en (37), corresponden, en virtud de las precedentes consideraciones, a otros tantos criterios generales relativos a la forma de las figuras.

Recordando (22 Obs.) y (30 Obs.) que una permanencia regular o singular de orden $h > 0$, corresponde también geométricamente a un ángulo poliedro de un espacio euclídeo de puntos de h dimensiones y que la igualdad de ellas se reduce, (36), a la de sus respectivas cadenas componentes, o secciones completas, resulta:

VIII) *Dos ángulos poliedros de la misma dimensión* $n \geq h > 1$ *pertenecen a una misma forma de h dimensiones si las figuras de sus respectivas secciones completas pertenecen, a su vez, a una misma forma de* $h - 1$ *dimensiones.*

En particular, de (36, VI) resulta inmediatamente que:

IX) *Los ángulos poliedros de* $n \geq h > 1$ *dimensiones formados por h hiperplanos pertenecen a una misma forma de* $h - 1$ *dimensiones.*

Puesto que los vértices de una figura poliédrica convexa de h dimensiones corresponden, o bien a ángulos poiledros formados por h hiperplanos o bien, para $h > 2$, a ángulos poliedros formados por más de h hiperplanos, caso singular, convendremos en decir que dos vértices de sendos poliedros convexos de h dimensiones *pertenecen a la misma forma,* si tal ocurre con los respectivos ángulos poliedros, (VIII), de los cuales ellos forman parte en las mencionadas figuras.

Los dos criterios generales de igualdad dados en (37), se expresarán, pues, en lenguaje geométrico como sigue:

X) *Dos figuras poliédricas convexas de igual dimensión* $n \geq h$ *pertenecen a la misma forma de h dimensiones si se verifican, a la vez, las tres condiciones siguientes:*

a) a cada vértice de una forma $\boldsymbol{F}$ *en una de ellas, corresponde un vértice perteneciente a la misma forma* $\boldsymbol{F}$ *en la otra;*

b) a cada cara de una forma Φ, *de* $h - 1$ *dimensiones, en una de ellas, corresponde una cara perteneciente a la misma forma* Φ, *en la otra;*

c) si dos caras en una de ellas son contiguas a una tercera, sus correspondientes también son contiguas a una misma cara en la otra.

Se obtiene el correspondiente al (37, II), sustituyendo en este último, la condición *c)* por la siguiente:

c') Si dos caras son contiguas en una de ellas, sus correspondientes también son contiguas en la otra.

Se logra abreviar el enunciado de ambos teoremas condensándolos en uno solo, si se conviene en que las condiciones *a)*, *c)* y *c')* signifiquen: *caras igualmente dispuestas.*

Entonces:

XI) *Dos figuras poliédricas convexas de una misma dimensión* $n \geq h$, *pertenecen a una misma forma de h dimensiones, si sus caras*

están igualmente dispuestas, y si a cada cara en una de ellas, perteneciente a una forma Φ, *corresponde una cara en la otra que pertenece también a* Φ.

Este teorema es análogo al teorema métrico de CAUCHY para dos poliedros convexos del espacio ordinario.

39. **El problema de Steiner.** — El problema de STEINER, para el espacio ordinario, puede enunciarse, ahora, con toda claridad. En su forma más general posible es el siguiente:

1. *¿Cuántas formas poliédricas convexas tridimensionales hay, de dada clase?*

Este problema debe considerarse resuelto en toda su generalidad. Bastará obtener, (26, VI), y (33, V), todas las cadenas ternarias regulares y singulares de clase igual a la dada. Son en número finito. Hay tantas formas ternarias de la dada clase, como cadenas distintas entre sí, (36), hay en el conjunto así obtenido.

Es claro que si sólo se piden los poliedros convexos tridimensionales de m caras, bastará considerar, (32), cadenas cerradas en el espacio E_3 métrico. Si en cambio se piden las figuras poliédricas cualesquiera de E_3, bastará considerar, (25), cadenas cerradas correspondientes a figuras en el espacio arguesiano E_3'. El problema es el mismo (1).

La generalización del problema de STEINER a cualquier espacio euclídeo E_h es la siguiente:

2. *¿Cuántas formas poliédricas convexas de h dimensiones y de clase m hay?*

También este problema debe considerarse resuelto en toda su generalidad. Bastará obtener, (26, VI), y (33, V), todas las cadenas regulares y singulares de orden h y de clase m. Hay tantas formas como cadenas distintas en el conjunto así obtenido.

Es ésta, como se ve, una solución constructiva, por cuanto es preciso obtener, previamente, cada una de las cadenas. En cuanto al cálculo directo del número, no creemos que sea, en general, una cuestión fácil, salvo, quizás, en casos particulares. De todas maneras, el análisis que precede pone claramente de manifiesto la naturaleza francamente *combinatoria* del problema.

En virtud de (25, V) y de (33, V), el estudio de esta interesantísima cuestión puede reducirse al caso de las cadenas regulares cerradas.

(1) Una obra muy moderna que trata de los poliedros ordinarios es la intitulada: *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder* de E. STEINITZ y H. RADEMACHER. Berlin - Julius Springer - 1934.

Para los espacios *uni* y *bi-dimensionales*, la respuesta al problema es inmediata y está dada por los teoremas (38, III y V).

40. **Formas polares recíprocas.** — Consideremos el conjunto de todas las cadenas iguales entre sí que definen (38), una misma forma de dimensión h y de clase m y sea $C_h(m, n)$ una de ellas, siendo n cualquier número no menor que h. Según que se interpreten, (5), en los sistemas, $S_h(m, n)$ que pertenecen, (32, IV), a dichas cadenas, sus ecuaciones (5.1), ya sea como hiperplanos o como puntos de un espacio arguesiano, obtendremos, respectivamente, sistemas $S_h(m, n)$ o sus duales $S'_h(m, n)$; y, (8), correspondientemente a éstos, figuras también duales, cada una de las cuales pertenece, a su vez, a sendas formas F y F' que se llamarán también *formas duales*.

Así, pues:

I) *Cada cadena* $C_h(m, n)$ *y todas las iguales a ella definen una misma forma poliédrica convexa* F, *y también la forma poliédrica convexa dual* F'.

Como, (5), de cada región definida por cada uno de los sistemas $S_h(m, n)$ se pasa a la de los duales, $S'_h(m, n)$, por medio de una polaridad y recíprocamente, tanto las correspondientes figuras como sus formas F y F' se dicen también *polares recíprocas*.

Este doble significado de una misma cadena y de todas las cadenas iguales a ella, está, pues, supeditado a la interpretación geométrica que se dé, en cada caso, de las filas que las forman. Si éstas se interpretan como hiperplanos, las permanencias de la cadena representan los *vértices* de las correspondientes figuras. Si, en cambio, se interpretan como puntos, las permanencias representan las *caras*.

41. **Extensión del concepto de figura poliédrica convexa.** — Es posible generalizar el concepto de figura poliédrica convexa, considerando regiones limitadas por hipersuperficies de Jordan en recintos abiertos, en los cuales el segmento está sustituído por un conveniente arco de curva de Jordan, ya que la convexidad no es una propiedad intrínseca de la figura, sino una propiedad ambiente.

Consideremos un sistema de $n > 1$ ecuaciones

$$f_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n, x_j) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad [41.1]$$

de modo que él defina una transformación homeomórfica cualquiera, de todo el espacio E_n de coordenadas cartesianas x_j del intervalo

$(-\infty, +\infty)$, en un recinto abierto R_n de coordenadas cartesianas ξ_j, el cual puede ser, a su vez, todo el espacio; por ejemplo:

$$\xi_j^3 - x_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Todo sistema normal de m inecuaciones lineales, cuando es compatible, entre los valores x_j:

$$a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{ij}\, x_j + \ldots + a_{in}\, x_n + c_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

define, en el recinto R_n de exietencia de las funciones

$$x_j = \varphi_j\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

un conjunto de puntos que puede considerarse *convexo*, con respecto a dicho recinto. Tal conjunto está limitado, en R_n, por las n hipersuperficies simples de JORDAN, cada una de las cuales es homeomorfa al correspondiente hiperplano del sistema precedente.

Para justificar tal generalización, basta observar que a todo segmento

$$x_j = x_j^0 + \lambda\,(x_j^1 - x_j^0), \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

de extremos (x_j^0, x_j^1), en E_n, corresponde en R_n, un arco simple de curva de JORDAN, pues, se tiene en [41.1],

$$f_j\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_j^0 + \lambda\,(x_j^1 - x_j^0)) = 0.$$

De donde, en virtud de las hipótesis hechas,

$$\xi_j = \psi_j\,(\lambda) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En base a esto, es inmediato que en el R_n se verifican las proposiciones (2, I, II, III), sobre las cuales se basa la convexidad.

Para abreviar, diremos que las infinitas variedades de JORDAN, dadas por las n funciones del sistema [41.1], constituyen un *reticulado natural* del recinto R_n.

Demostraremos, ahora que:

I) *En todo recinto R_n, limitado por una variedad simple y cerrada de* JORDAN, M_{n-1}, *de* $n - 1 > 0$ *dimensiones, existe un reticulado natural.*

En efecto, en tal hipótesis, el recinto abierto R_n, es decir, el interior, es homeomorfo al interior de un recinto hipercúbico C_n de n dimensiones de E_n. Sea dicho hipercubo el que tiene arista igual a 2 y centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, $O\,(y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n)$ de E_n. Si Ω, es el homeomorfismo que transforma R_n en C_n, las coordenadas cartesianas $O'\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n)$ de los puntos de R_n son funciones de la forma

$$f_j\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, y_j) = 0\,, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

las que, por definir un homeomorfismo, cumplen las mismas condiciones que las [41.1], siendo en este caso $-1 < y_j < 1$.

Pero, mediante un nuevo homeomorfismo que transforme todo el intervalo abierto $(-1, +1)$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, por ejemplo:

$$x_j = \frac{y_j}{1 - |y_j|} \qquad \therefore \qquad y_j = \frac{x_j}{1 + |x_j|}\,,$$

se logra que las n funciones

$$f_j\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n \frac{x_j}{1 + |x_j|}\right) \equiv F_j\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n, x_j) = 0\,, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

definan, en R_n, un reticulado natural.

Es claro que a tales figuras de R_n les es aplicable también el concepto de cadena, el de forma, etc., y valen, para ellas, todas las propiedades de aquéllas, dentro del recinto a que pertenecen las correspondientes figuras.

En cuanto a la forma, ella es *invariante* en tales tipos de homeomorfismos, puesto que sólo depende de la cadena.

FIN DE LA PRIMERA PARTE

SOBRE EJEMPLARES JUVENILES DEL GÉNERO «SCELIDOTHERIUM»

POR

CARLOS RUSCONI

I

Aun cuando son muchísimos los hallazgos de restos fósiles de nuestros grandes desdentados extinguidos, muy pocas son, en cambio, las noticias que se tienen con respecto a los descubrimientos de individuos sea recién nacidos o de estado intrauterino. Este hecho se explica en parte, debido a que a esa edad el hueso tiene poca consistencia y está desprovisto de la gran cantidad de calcio como se manifiesta este último en los individuos adultos, cuyo elemento, como se sabe, permite preservar más al hueso. Solamente pudieron conservarse aquellos esqueletos o parte de los mismos de individuos que, al morir, quedaron luego inmediatamente sepultados en fangos lagunares o en terrenos que bajo circunstancias especiales impidieron el proceso rápido de la destrucción ósea. Por lo menos así parece haber ocurrido con diversos despojos observados hace años en el Museo, mas casi todos los restos que forman parte de la colección Rusconi, y son estos últimos también los que motivan las presentes líneas. Los dibujos son del autor.

II

Trátase, en efecto, de cuatro porciones mandibulares pertenecientes a distintos individuos y procedentes del piso ensenadense, a saber:

N° 1150 de la colección paleontológica Rusconi. Porción mandibular del lado izquierdo con los cuatro dientes bien conservados de un individuo que si no es nonato por lo menos tiene características del recién nacido; fué hallado frente a la estación J. Anchorena.

N° 1105, de la colección Rusconi. Porción mandibular del lado

izquierdo con restos de los dos primeros dientes y gran parte de la sínfisis de un individuo juvenil pero de algo más edad que el anterior; fué hallado también frente a la estación Anchorena (1).

N° 19 de la colección Rusconi. Porción mandibular del lado izquierdo con los cuatro dientes aunque el último deteriorado en la corona; procede de Olivos.

N° 233 de la colección Rusconi. Porción mandibular del lado derecho con los cuatro dientes bien conservados; otra del lado izquierdo con los tres primeros dientes, escápula, costillas, etc., todos de un mismo individuo joven-adulto, y un poco más avanzado en edad que el anterior. Procede de terreno loesoide pardo claro de los arrecifes del río frente a la estación Olivos.

Los tres primeros restos tienen una coloración gris verdosa y sus intersticios están llenos del mismo conglomerado calcáreo sumamente duro en que yacían. En estos bancos calcáreos — que son depósitos de antiguas lagunas — los huesos se encuentran generalmente bien conservados, pero, a veces, resulta dificultoso poderlos extraer de esa matriz durísima. Sólo la erosión del agua, que, actuando constantemente sobre dicha superficie calcárea, los va sacando lentamente, sin destruirles, en ciertos casos, ni los más insignificantes detalles óseos. Y es en esos mismos terrenos, sea dicho de paso, donde han sido posibles los hallazgos de la mayor parte de los huesos de poca consistencia (reptiles, aves, batracios, etc.) de la época ensenadense, algunos de los cuales los he dado a conocer en otras publicaciones (véase Rusconi, 1936 y 1937).

III

Mandíbula. — La mandíbula N° 1150 se conserva desde el conducto dental anterior o sinfisiano hasta el conducto posterior situado detrás del último molar. Vista de arriba (fig. 1) la rama muestra una línea bastante recta advirtiéndose tan sólo una débil constricción en la zona sinfisiana; en la mandíbula n° 1105 se manifiesta ya una mayor torsión hacia la línea medial siendo mucho más acentuada en los individuos adultos.

En su vista lateral externa (fig. 2), la rama presenta una superficie más convexa al nivel de las raíces de los dos dientes centrales que sigue hacia atrás y arriba coincidiendo con la raíz de la rama ascendente. En la parte anterior de la pieza y en el borde de la rotura

(1) Quédole muy agradecido al señor Oscar Román por la donación de esta pieza.

aparece el agujero mentoniano que tiene casi 3 milímetros de diámetro; otro se encuentra en la mitad de la altura de la rama y en la cara anterior el primer diente. El agujero dental posterior está parcialmente roto; tiene 4 milímetros de diámetro y se encuentra detrás del último diente. La distancia que media entre ambos agujeros principales es de 75 milímetros, mientras que en las formas adultas pasa de los 180 milímetros.

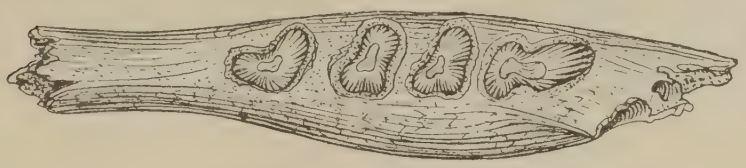


FIG. 1. — Mandíbula del lado izquierdo de un individuo juvenil de *Scelidotherium ?Bravardi*, Nº 1150, en tamaño natural.

Una particularidad interesante es, por ejemplo, la estructura ósea en los diferentes estadios de su evolución ontogenética. Pues, en el animal nonato nº 1150, la superficie muestra un aspecto escamoso dando la impresión de estar constituído el hueso de numerosas laminillas superpuestas, asemejándose en cierto modo a un tronco de árbol viejo en el que la intemperie lo ha rebajado perpendicularmente dejando ver sus círculos anuales en forma irregular. En los individuos de mayor edad (fig. 4, nº 19 y 233), el hueso presenta parcialmente esa estructura, ofreciendo el resto una superficie de aspecto poroso.

Dentadura. — Como se sabe, casi la totalidad de nuestros desdentados extinguidos pilosos (*Megatherium*, *Lestodon*, etc.) y los provistos de coraza (*Glyptodon*, *Sclerocalyptus*, etc.) presentaban en su estado juvenil o recién nacidos dientes de figura cónica. Y en las mandíbulas de los celidoterios ocurre lo mismo. La parte superior de la corona tiene el aspecto de un cono de superficie lateral sensiblemente convexa en el extremo superior y casi aplanada en el resto del diente. Además, las superficies de trituración no están dispuestas horizontalmente y describen distintas figuras, siendo triangular en los primeros y en forma de un « 8 » en el último. Esta figura es más regular en la cúspide que en la raíz, pero con la edad ella se va modificando debido a la sensible torsión que sufre en todo su recorrido el lóbulo posterior del cuarto diente. También el primer diente sufre una pequeña modificación a través de su desarrollo ontogénico,

pues, en los individuos juveniles el referido órgano describe la sección de un triángulo más regular mientras que en los adultos el triángulo tiene una de las caras mucho más ancha, tendiendo hacia la forma elíptica, cuya base está situada hacia la línea medial. Los dientes de los celidoterios juveniles tienen también una gran cavidad para la pulpa dental, pero ella se reducía con el crecimiento de la vasidentina que se operaba con el progresivo desarrollo del individuo. Por otra parte, es digno de hacer notar que en los órganos juveniles la capa de dentina estaba recubierta, a veces parcialmente, por una cutícula sumamente delgada de cemento, mientras que en los individuos adultos aumentaba hasta más de un milímetro de espesor.

IV

Crecimiento dental. — Sabido es también que los dientes de los desdentados extinguidos eran de crecimiento continuo, esto es, que tan pronto desgastaban su corona, la raíz reponía los elementos indispensables para mantener de ese modo el nivel adecuado a los efectos de la masticación.

En los megaterios, según Kraglievich, ese movimiento de trituración, desgaste mecánico y reposición dental, era muy grande, habiendo calculado que si en un megaterio se le hubiera desplazado un diente desde su primera edad y no se habría gastado nunca, ese órgano hubiese crecido indefinidamente hasta alcanzar varios metros de longitud.

En los celidoterios no debió ser tan grande ese crecimiento, pero es indudable que ha existido el referido fenómeno. En el ejemplar n° 1150, los dientes tienen una longitud que oscila entre 23 y 25 milímetros medidos por el lado externo; en el ejemplar 19 es de 44 a 50, y en los adultos alcanzaban más de 100 milímetros. Burmeister (1879, p. 327), ha dado las medidas de algunos ejemplares que según él « habían pasado apenas del primer año » de vida, y que la longitud de los dientes era de 2 1/2 pulgada (57 milímteros), lo que demuestra que tenían ellos más edad que el ejemplar n° 19 pero quizá comparable al n° 233, ya recordado más arriba.

De acuerdo a los cálculos efectuados sobre diferentes mandíbulas pertenecientes a individuos de distintas edades, he llegado a la conclusión que los celidoterios adultos para que sus dientes alcanzaran la forma y diámetro máximo tanto en la extremidad coronal como en la raíz, deben haber tenido un crecimiento de más de 50 centímetros, de los cuales, 40 centímetros han desaparecido con la mas-

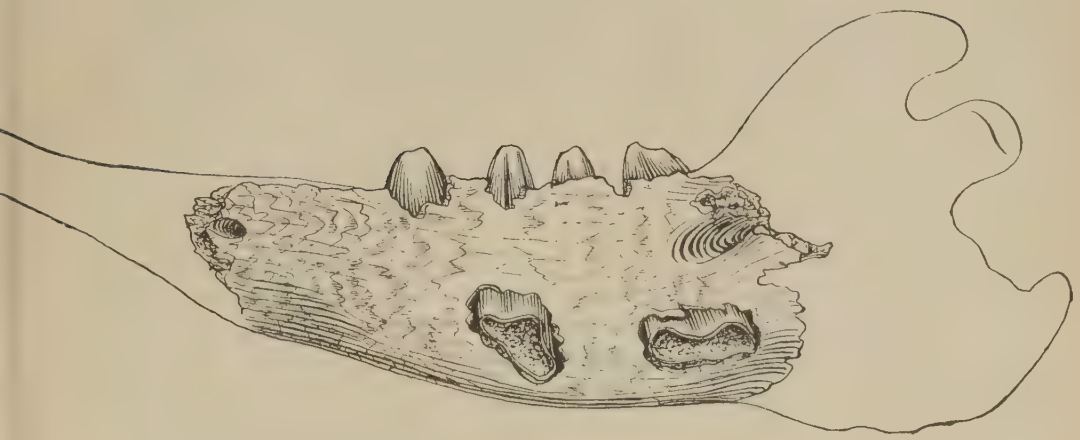


FIG. 2. — La misma mandíbula Nº 1150, reconstruída en tam. nat.

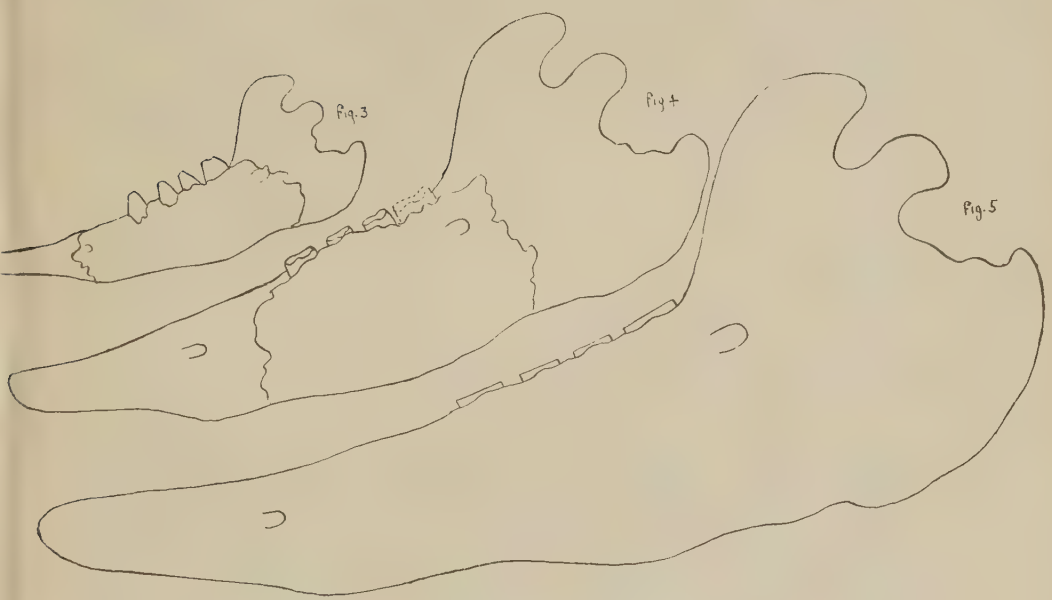


FIG. 3. — Reconstrucción de la mandíbula de *Scelidotherium Bravardi*, ejemplar juvenil.
FIG. 4. — Reconstrucción de otra mandíbula de un individuo joven - adulto.
FIG. 5. — Mandíbula de un individuo adulto; todas reducidas a 1/3 del natural.

tication. Tal magnitud implica, desde luego, una actividad extraordinaria en los órganos encargados de llevar los elementos indispensables a la formación de la dentina y vasidentina, motivada, sobre todo, por el continuado proceso masticatriz a que han sido sometidas las coronas durante la vida del animal.

V

Edad de los especímenes. — Un problema del que pocos se han preocupado es el que se refiere a la probable longevidad individual de nuestros desdentados extinguidos. Cierto es que todo cuanto se refiera a este punto siempre estará rodeado de conjeturas, quizá unas más viables que otras, y la edad que se le atribuye, aun cuando ella sea basada en otros términos de comparación, estará igualmente sujeta a simples cálculos sobre todos si los especímenes examinados muestran ya indicios evidentes del desgaste producido por la masticación, como es el caso de los ejemplares n° 19, fig. 4, y n° 233.

Muy distintamente ocurre con la pieza n° 1150; pues, examinando la punta de los dientes, se advierte un pequeño desgaste que no es horizontal a la dentadura sino dispuestos en distintos planos. Dicho detalle es muy visible en el último diente, que muestra dos superficies siendo una bastante cóncava. Y tales características unidas a la morfología dental me permiten adelantar también dos hipótesis, a saber:

1° Que la pieza n° 1150 puede haber pertenecido a un animal nonato, y que el desgaste coronal se habría operado en su vida intrauterina.

2° Que correspondería a un animal recién nacido, en estado de lactancia, y su desgaste se habría producido por simple frote durante los primeros tiempos de su vida extrauterina.

El primer caso implicaría suponer que el animal en su vida intrauterina realizaba ya movimientos de su mandíbula en sentido lateral y de adelante hacia atrás simplemente por presión de sus músculos correspondientes. Este fenómeno fisiomecánico se advierte con alguna frecuencia en diversos grupos de animales, en especial sobre aquellos cuyos dientes son de crecimiento continuo y que han llegado a un grado de especialización muy avanzado en el sentido de su rápida irrupción dental. Tales ejemplos se observan en nuestras cavias (*Cavia pamparum*, etc.); en los carpinchos (*Hydrochoerus hydro-*

choeris), etc., y sobre estos últimos he tenido oportunidad de seguir las modificaciones que sufre su serie molar habiéndome demostrado que los individuos nonatos o fetos a término, presentan ya un acentuado desgaste en los primeros y a veces hasta en el último diente tanto del maxilar como de la mandíbula, como tendré oportunidad de ocuparme sobre el particular oportunamente.

El segundo caso consistiría en suponer que los celidoterios comenzaban a desgastar la corona dental en los primeros tiempos del nacimiento y cuando se encontraban aún en período de lactancia, y a cuya hipótesis prefiero adherirme.

Sea como fuere, el hecho es que la mandíbula en cuestión tiene que haber pertenecido a un animal sumamente juvenil, y es uno de los más jóvenes individuos que he tenido oportunidad de examinar de los numerosos ejemplares pertenecientes a especies del pampeano inferior como del pampeano superior.

La pieza en cuestión ofrece, asimismo, interés con respecto a ciertos aspectos de la evolución ontogenética de los celidoterios y permite ser utilizada como término de comparación para conocer no sólo las diferencias volumétricas mandibulares y craneanas sino también el volumen del cuerpo en sus respectivos estadios.

Ahora bien, si un celidoterio adulto mide alrededor de los 3,50 metros de longitud desde el hocico a la punta de la cola, por 1,30 de altura en la cruz, entonces un recién nacido debió tener 1 metro de longitud por unos 35 centímetros de alto, aproximadamente, esto es, de un tamaño más o menos parecido al de un carpincho no muy bien desarrollado

Las reconstrucciones de las mandíbulas juveniles han sido basadas de acuerdo a la mandíbula de *Scelidotherium Bravardi* dada por Ameghino en 1889 (lám. XLVIII, fig. 2), debido a que es la especie más común en el piso ensenadense, y además, que las mandíbulas juveniles parecen corresponder también a esta especie. Demás estará decir que las partes reconstruídas tienen un valor relativo, y bien podría ocurrir que tanto la rama ascendente como su cóndilo hayan sido más bajos en los individuos jóvenes, pero que estos pequeños detalles no tienen para el caso mucha importancia desde el momento que la reconstrucción ha sido hecha con el objeto de ofrecer al lector una idea más clara con respecto a las proporciones entre un espécimen nonato (fig. 3) con otro joven-adulto (fig. 4) y con otro adulto (fig. 5).

Medida de las mandíbulas de *Scelidotherium Bravardi*, en milímetros

	Nº 1150 Col. Rusc.	Nº 19 Col. Rusc.	Nº 233 Col. Rusc.	Según Amegh. 1889
Diámetro anteroposterior oblicuo del primer diente, en la superficie masticatoria	3,5	12,3	14	—
Longitud total (corona-raíz)	23	44, ap.	—	—
Diámetro anteroposterior del segundo diente	3,5	12	15	—
Longitud total (corona-raíz)	25	50	—	—
Diámetro anteroposterior del tercer diente	3	12	15,5	—
Longitud total (corona-raíz)	25	50	—	—
Diámetro anteroposterior del cuarto diente	6	17	19	—
Longitud total (corona-raíz)	26	48	—	—
Espacio ocupado por los cuatro dientes en la corona	38	60	64	100, ap.
Alto de la mandíbula al nivel del segundo diente	31	61	—	—
Espesor de la rama al mismo nivel	17	28	29	—
Longitud mandibular total (reconstruída)	155, ap.	290, ap.	—	400, ap.

Nota: ap., medida aproximada.

BIBLIOGRAFÍA

Ameghino, F. *Contribución al conocimiento de los mamíferos fósiles de la República Argentina*, en *Actas de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba*, vol. VI, Buenos Aires, 1889.

Burmeister, G. *Description Physique*, vol. III, Buenos Aires, 1879.

Rusconi, C. *Distribución de los vertebrados fósiles del piso ensenadense*, en *Bol. de la Acad. Nac. de Ciencias en Córdoba*, vol. XXXIII, pp. 183-215, Buenos Aires, 1936.

Rusconi, C. *Contribución al conocimiento de la geología de la ciudad de Buenos Aires y sus alrededores y referencia de su fauna*, en *Actas de la Academia Nacional de Ciencias en Córboba*, vol. X, pp. 177-384, Buenos Aires, 1937.

ALGUNOS APUNTES SOBRE LA PRODUCCIÓN DEL ANHIDRIDO CARBÓNICO ANTROPÓGENO

Por el Dr. WALTER KNOCHE
(De la Dirección de Meteorología)

Los datos que da al respecto V. M. Goldschmidt (1) son verdaderamente notables. Según éstos, existen en las plantas terrestres 0,2 gr. de CO_2, en la atmósfera 0,4 gr. y en el humus 1,4 gr. de CO_2 por unidad de peso. De manera que el humus contiene una séptupla del anhidrido carbónico de la vegetación y la triple o hasta la cuádruple del de la atmósfera.

Los incendios (2), ciertas formas de la agricultura, el pastoreo de los animales, en suma la acción del hombre, tienen una influencia destructora casi mayor sobre la capa de humus que la que ejercen sobre la vegetación. Esta influencia se intensifica aún más con la destrucción de bosques que de praderas. Maclagan Gorrie (3) estima en cuatro veces mayor el valor de la erosión del suelo por el agua, aunque se trate de una precipitación de igual fuerza, con relación a un terreno cubierto por un bosque de robles. Este valor aumenta de 3-4000 veces más en los desiertos y en los cultivos de algodón. En algunas chacras (Estados Unidos), la pérdida de terreno llegó por año a 25-30 t. por Ha.

El proceso de carbonización, sumamente lento y permanente, se transforma, por el hombre, en proceso repentino y temporario.

(En el humus se verifica, además, según Godschmidt, un enriquecimiento especial de elementos raros considerados hoy, fisiológicamente, muy importantes, como ciertos metales, el berilo, escandio, manganeso, níquel, cobalto, plomo, etc. Estos, concentrados, finalmente, son llevados en parte, después de una estadía temporaria en la atmósfera, como la mayoría de las suspensiones atmosféricas, al océano. No entramos aquí en detalles sobre las posibles consecuencias biológicas de tales intervenciones antropógenas).

En todo caso debe haber disminuído de un modo extraordinario la cantidad total del CO_2 contenida en las plantas campestres y en

el humus, después de haber entrado en actuación el «homo sapiens».

Podemos suponer que al terminar la época glacial, toda la tierra, prácticamente, con excepción de las regiones polares y de la tundra subártica, como asimismo las regiones de los bosques más arriba del límite de altura sobre el nivel del mar, estaban cubiertas con selvas, las que se transformaban en parte en erófilas debido a la creciente sequía. Solamente en medida muy reducida, por causas climáticas planetarias, se efectuó una transformación del bosque en estepa. Sin duda fué el hombre quien tuvo la participación mayor en la destrucción de las selvas. También las pequeñas tribus, ya sea cazando y más tarde como nómades, contribuían a destruir la vegetación con incendios originados por descuido o por intención. Comparada con la que se registra en la estepa hay muy poca caza en los bosques. El cazador lo debe haber observado, y por eso contribuyó, seguramente en el principio de su actuación, por la destrucción de los árboles, a la multiplicación de los animales de caza, en cantidad superior a sus exigencias. Recién más tarde, en tiempos históricos relativamente cercanos, se observa un aumento enorme de los animales domésticos, paralelo a un aumento acelerado de la humanidad.

En todo caso, la Europa Central, Sud, Oeste y Este, tan pobre en bosques, representa un cuadro de esta transformación. Su destrucción en el último decenio ha hecho progresos inquietantes hasta en el Norte de Europa (Rusia Europea) comparados con la replantación. Casi toda la China estaba cubierta de bosques antes de ser habitada por el hombre, lo mismo la India y los Continentes de Norte y Sudamérica. Schmieder opina, y con razón, que la pampa argentina había estado cubierta con árboles que fueron destruídos por los indios; yo creo que el despoblado Matto Grosso (bosque espeso) se ha transformado recién en los últimos siglos en estepa debido a incendios intencionales (4). Del mismo modo puede explicarse la formación de los campos amazónicos.

Africa posee hoy en los bosques sobre las costas del oeste, como asimismo en el bosque virgen de la región central del Congo, solamente un pequeño porcentaje de su vegetación primitiva. Anualmente se extiende la sabana del Sudán en tres kilómetros desde el noreste y este, hacia la costa, mientras que del lado del Atlántico se aumenta más y más el terreno que ocupan las grandes haciendas industriales. De manera que aquí se produce una rápida disminución de la vegetación. Al mismo tiempo, no hay que olvidar que el Sudán

que constantemente está absorbido desde el norte por el Sahara es, en su mayor parte, obra del hombre (5).

Sin duda, éste ha destruído ya en regiones vastas la capa de humus, y por consiguiente su contenido de CO_2, igualmente que el CO_2 de la vegetación, el que con relación a los bosques, es mucho mayor que el de las praderas, campos, sabanas o estepas. Estas últimas se han transformado en parte (principalmente por procesos antropógenos) en estepas-desiertas o desiertos. Debe agregarse al contenido de CO_2 (o de C) de la vegetación total, su proceso de respiración. La masa asimilativa del CO_2 ha ido disminuyendo continuamente y de un modo extraordinario desde la aparición del « homo sapiens », y sigue constantemente en disminución, mientras que, por el contrario, la masa de CO_2 (en su mayoría antropógena) sigue aumentando. Muy interesante es la cuestión que se refiere a las cantidades de los distintos substratos que producen ácido carbónico:

1) La parte de CO_2 juvenil (20 millones de ton. por año) es insignificante en comparación con la producción antropógena (1/300-1/400). Es cierto que este proceso, que se realiza desde hace millones de años, desde la época terciaria, paulatinamente va en descenso.

2) El CO_2 producido por la actividad humana por orden de cantidad, proviene por año de $1\,^1/_2$ mil millones de ton. de carbón de piedra consumido (industria, uso doméstico), y asciende a 4 mil millones de ton. de CO_2 que son llevados a la atmósfera. Esta cantidad corresponde a un resultado de carbonización equivalente a 400.000 años. Existen diferencias considerables en cuanto a la disposición geográfica y temporal de los incendios antropógenos. Las regiones industriales y las ciudades son, a igual que los volcanes, productores puntiformes de CO_2 (vapor de agua, hollín y ceniza) en comparación con las vastas regiones de incendios de vegetación. La combustión en la industria y la calefacción es un proceso continuo, mientras que la destrucción de la vegetación por el fuego ocurre solamente en tiempos de sequía, o, por lo menos, en periodos de sequía. Actualmente se encuentran los centros importantes de combustión industrial en regiones de precipitación repartidas con regularidad durante todo el año.

3) La cantidad adicional producida por la combustión de vegetación (bosque y estepa) puede valorarse por orden de cantidad, aparte de 30 a 40 millones de ton. de elementos sólidos y un millón de ton. de agua, en 3 o probablemente 4 mil millones de ton. de CO_2.

Se producen, pues, por año, por combustión antropógena, en números redondos, 8 mil millones de ton. de CO_2.

Debe observarse que en el curso de la historia humana, y en grado siempre ascendente, ha tenido mucha importancia desde hace 10 a 12 mil años la extirpación de los bosques por incendio, mientras que la combustión industrial casera, aumentando continuamente, cuenta con sólo 100 años. La extensión de los bosques desde hace 10.000 años, debe haberse reducido a una tercera parte.

Evidentemente, se presentan, de año en año, importantes fluctuaciones en la producción de los gases resultantes de la combustión y de las suspensiones de incendio (combustión casera, extirpación de bosques por el fuego).

4) A la participación en la producción del CO_2 se suma, gracias a la conquista de la superficie de la tierra por el hombre, el que es producido por la respiración de él mismo y sus animales domésticos. Desde la época glacial hasta hoy día ([6]), la cantidad de seres humanos aumentó de unos cientos de miles a 2100 millones, y de igual modo se multiplicaron sus animales domésticos. Y justamente este aumento del ganado es la causa de la *estepización.*

Si se calcula que el hombre que trabaja livianamente produce más o menos 1 kg. de CO_2, los animales domésticos, en su mitad ganado grande, m. o m. 2 kg. de CO_2 por cabeza en el mismo espacio de tiempo, resulta que casi el total de la producción es causada por el proceso de respiración de 2 a $2^1/_2$ mil millones de ton. de CO_2. No se incluye en este cálculo la respiración de las aves de corral y la fauna silvestre. El número de animales de caza ha disminuído fuertemente, en parte, pero en algunas regiones ha aumentado por influencia del hombre. Su proceso de vida no tiene importancia comparado con el de los animales domésticos.

En todo caso, sumando 2, 3 y 4 (sin contar la parte de la descomposición no valorizada del hombre, de los animales domésticos y de la vegetación cultivada), se realiza actualmente una producción de más de 10 mil millones de t. de CO_2 por año, producido por la actividad humana.

Si se tratara de sumar los valores de 2, 3 y 4, daría por orden de cantidad producida de CO_2, los siguientes valores: Si calculamos el promedio de la combustión industrial y doméstica de 100 años como $^1/_2$ mil millones de ton. de CO_2 por año, entonces resultaría un total de 50 mil millones de tno. de CO_2 producido industrialmente. Si calculamos por incendios de bosques y estepas un promedio anual de 1 mil millones de ton. en vez de los 4 mil millones de ton. de hoy, durante un espacio de tiempo de sólo 10.000 años, llegaríamos a un valor de 10 billones de ton. de CO_2. La suma total para 2 desaparece-

ría y con más razón la suma total para 3 (respiración humana y animal), aunque su participación es tan importante en los tiempos actuales.

El 98 % de estos 10 billones de ton. fueron llevados al océano: solamente el 2 % quedó en la atmósfera, es decir 200 mil millones de ton. El contenido de CO_2 en la atmósfera es de 2 billones de ton. Desde la aparición del « homo sapiens » debe haber entonces aumentado la cantidad del CO_2 en varios porcientos. Semejante transformación debe producir ciertos cambios climáticos (por ejemplo: alteración de la absorción actínica, aumento de calor, cambio del estado coloidal atmosférico). Este proceso del aumento del CO_2 en medida constantemente ascendente, formará progresivamente un cambio climático, aunque esto puede ser sobrepasado en sus consecuencias por influencias macroclimáticas (períodos climáticos atlánticos, continentales, calurosos, frescos, etc.); pero en todo caso existe.

Si volvemos atrás en la historia terrestre se presenta el siguiente proceso: En la época terciaria hay grandiosas exhalaciones juveniles de CO_2 por una actividad volcánica muy viva, luego una disminución del CO_2 juvenil hasta un cierto minimum; y después, desde la terminación de la última época glacial resp. pluvial, la producción antropógena de CO_2 aumenta, en gran escala, en los últimos 100 años.

Naturalmente, se le quita, según v. Hoefft, una correspondiente cantidad de oxígeno a la atmósfera, la que es llevada al océano [7]. Pero como toma en cuenta sólo la combustión industrial, llega a un total de menos de 100 % de la determinada por mí. La suma total de la descomposición de las plantas, resp. la carbonización, ha disminuído constantemente debido a la destrucción de los bosques, y sigue disminuyendo. Además, son igualmente llevadas al océano las masas de C contenido en el humus por erosión. Esto ocurre aún en las zonas templadas, y más allá, en las zonas subpolares (Canadá).

Resumen total: Aumento de los océanos y disminución de la atmósfera y sus correspondientes consecuencias en un grado nada despreciable. La respiración de oxígeno de la bioesfera presenta una marcada disminución a causa de la vegetación destruída desde la aparición del « homo sapiens ».

Se puede hasta discutir « cum grano salis » si el hombre, ante todo el hombre fáustico, no priva lentamente a la tierra de su atmósfera, atmósfera formada, según Berg [8], en millones de años por la misma vida orgánica.

BIBLIOGRAFÍA

(1) V. M. Goldeschmidt. *Drei Vortraege ueber Geochemie, Geologiska Föreningen,* Mai-Oktober 1934, p. 415-416.

(2) Walter Knoche. *Der Einfluss von Vegetationsbränden auf die Witterung.* Met. Ztschr. H. 7. 1937, p. 244.

(3) B. Maclagan Gorrie. *The use and misuse of land.* Oxford Forestry Memoirs nº 19. Oxford Clarendon Press, 1935.

(4) W. Knoche. *Der Parana als Scheide zwischen Urwald und Savanne.* Ztschr. d. Ges. f. Erdk. z. Berlin. H. 7/8, 1928.

(5) Walter Knoche. *Zur Entstehung der Wueste Sahara.* Forsch. u. Fortschr. 10. I. 1936, p. 24.

(6) E. Fels. *Der Mensch als Gestalter der Erde.* Leipzig, 1935.

(7) F. v. Hoefft. *Zur Geochemie des Kohlenstoffs. Verh. d. geologischen Bundesanstalt.* Wien, 1936. Nr. 11, p. 722.

(8) *Zur Frage des Klimabegriffs. Meteorología i Hidrología.* Nr. 7, 1936, Moscú, p. 69. *Bespr. Ann d. Hydrogr.,* H. III, 1938, p. 142.

COTEJOS ECONÓMICOS Y SELECCION ECONÓMICA

Por el Ing. MAURICIO DURRIEU

(*Conclusión*)

89. — El monto de operaciones o transacciones. — Visible es que en el ejercicio de una empresa de hacienda y de capital dados, pueden ocurrir y ocurren de ordinario *transacciones* u *operaciones*, es decir, conmutaciones de valores con el mundo exterior, cuyo monto reunido difiere del caudal y del capital expresados. Es esto así, porque dentro de un período de tiempo renuévanse con frecuencia múltiples operaciones en las cuales se empeña parcialmente el caudal.

Dejando a un lado la acepción amplia de la expresión, que referiríase a operaciones tanto de compra como de venta, aceptaremos en lo sucesivo que el *monto de operaciones* o *transacciones* aluda exclusivamente a la cantidad pecuniaria a que ascienda la totalidad de las ventas (volumen de ventas) de productos efectuadas en determinado período (generalmente, anual).

No debe confundirse ese monto con el valor de la producción, porque de éste ocurre descartar la producción parcialmente retenida en fábrica u obrador o absorbida por necesidades de la empresa.

Por otra parte, y previa la exacta discriminación de las operaciones razonablemente computables, la determinación del monto de transacciones *neto* es la que interesa en materia de equiparaciones de ejercicios. Significa esto que no sólo debe computarse precisamente toda operación encuadrada en los fines corrientes de cada empresa, y que ocurre dentro del plazo de comparación, sino que se desestimarán todas aquellas operaciones accesorias que por versar sobre mercaderías u objetos que no sean *productos*, o circunstanciales que puedan no estar contenidas en los términos de otros valores de cotejo, constituirían factores de confusión o desigualdad.

Con bastante detalle y aclaración gráfica, explica el ingeniero Dr. Zeidler (op. cit., pág. 29) la formación del monto de operaciones que conviene considerar en los cotejos.

Son elementos aditivos:

a) Todas las operaciones de productos computadas con salidas efectuadas o de entrega postergada, y sus rectificaciones;

b) El monto total de productos utilizados por la propia empresa en su fábrica o talleres.

Elementos sustractivos, son:

c) Las ventas accesorias de mercaderías que no constituyen propiamente productos (combustible, víveres, etc., que sean partes de las existencias de la fábrica);

d) Los créditos correspondientes a diferencias de precios y cantidades y reservas, por rebajas de precios (exceptuadas las pérdidas extraordinarias, que han de asentarse en partidas especiales) y asimismo los fletes, derechos aduaneros e impuestos a la empresa;

e) Las comisiones, el impuesto sobre el monto de los negocios.

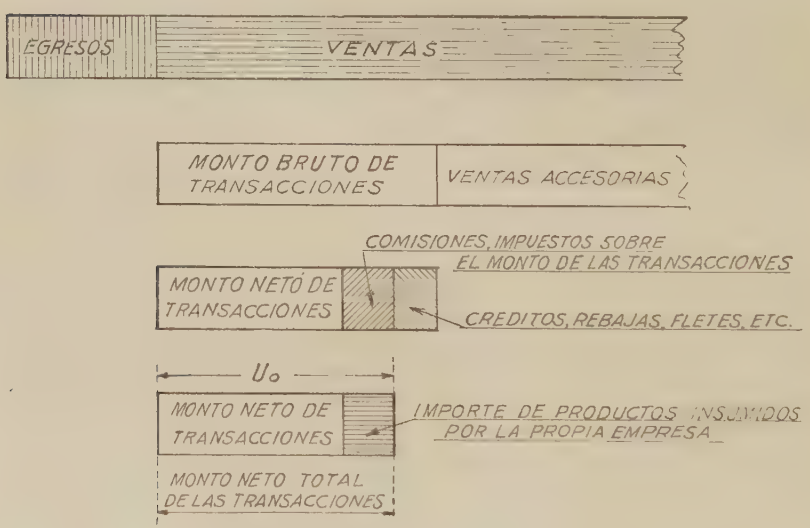


Fig. 2.

Restado (fig. 2) del importe total de *a*) el de *c*), queda el *monto bruto de transacciones.*

Deducidos de éste los importes reunidos correspondientes a *e*) y *d*), obtiénese el *monto neto de las transacciones*; mas, en rigor, a este monto neto débese incorporar el importe de *b*) para determinar

el *monto neto total de las transacciones* [1]. A este último, le llamaremos U_0.

No se incluyen en el monto de transacciones los provechos accesorios y las ventas que no importan transacciones, como los provechos de valores de las instalaciones y de la administración, de ventas de recortes y desperdicios (por el contrario, hay un monto de operaciones en productos accesorios), y tampoco los ingresos por alquileres, negocio de las cantinas de los obradores, intereses por anticipos de fondos.

90. — CIFRA DE EVOLUCIONES O COEFICIENTE DE CIRCULACIÓN. — La medida de la magnitud y celeridad con que empéñase el caudal activo de una empresa en las operaciones a que ésta se dedica, hállase dada mediante una *cifra de relación* que denominaremos *cifra de evoluciones*, u [2]. Llamada H_e la hacienda de explotación, la relación

$$u = \frac{U_0}{H_e} \qquad [95]$$

significa evidentemente el número de veces que el caudal de explotación interviene en el monto neto de las operaciones de la industria.

Importa una calificación *unitaria* de las operaciones de la empresa [3] y brinda, a la vez que un elemento importantísimo de apreciación directa de la actividad de dicha empresa, un criterio que coadyuva en los arreglos de cuentas, el establecimiento de participaciones en las utilidades de cada ejercicio, la prevención del monto de transacciones, etc.

91. — COTEJOS DE RELACIÓN GLOBAL. — I. *Concepto de rendición: Rendición específica; cifras conexas.* — El valor determinante de un proceso económico en la industria privada, es su *rendición o utilidad específica*, cuya expresión general es

$$\text{Rendición específica} = \frac{\text{Ganancia}}{\text{Capital}} = R \qquad [96]$$

(1) Los alemanes desígnanle con las expresiones *der Gesamt-Netto-Umsatz* y *der Erlös*.

(2) En alemán *die Umschlagziffer*.

(3) Porque se refiere la totalidad líquida de operaciones a la unidad de caudal de explotación.

Cabe determinar los montos del numerador y del denominador del segundo miembro de manera bastante distinta, computando en ellos elementos y resultados del proceso económico que sin apartarse del concepto buscado de rendición, no significan lo mismo ni suministran, por relación, una invariable noción de la economía considerada.

El ingeniero Dr. Zeidler (op. et loc. cit.) indica tres maneras de expresión de la rendición específica.

Al darlas a conocer y explicarlas, ocurre aclarar conceptos relativos a la ganancia.

La *ganancia neta o líquida* (« der Reingewinn », en alemán) de una empresa industrial, derivada de su actividad completa, es consiguiente del mayor monto que ofrece el *producto general* o total [1] realizado en determinado plazo (un año, p. ej.) referido al gasto [2] total habido durante el mismo plazo. Esta ganancia incluye la parte accesoria en operaciones que no corresponden a la actividad propia de la empresa. Constituye la ganancia líquida así originada, un elemento que es relacionado corrientemente con el *capital nominal* (capital en acciones) de la empresa, con el propósito de conocer la *rendición financiera* [3] de ese capital, base usual de su empleo. Escribiremos de consiguiente, en primer lugar

$$\text{Rendición financiera} = R_1 = \frac{\text{Beneficio líquido anual}}{\text{Capital nominal}} \qquad [97]$$

cifra que podrá asimismo expresarse por ciento.

En otro orden de ideas, cuando nos interese averiguar la rendición específica de la empresa contemplando únicamente su *actividad propia*, estableceremos el *monto neto total de operaciones* y deduciremos de él la totalidad de los *costos* de elaboración (*costos objetivos de obtención* o más sencillamente *costos de obtención* [4], incluídos los montos de amortización de instalaciones e intereses), para hallar la ganancia del *fondo o monto de transacciones*. Dividiendo esta ganancia por el caudal total de explotación, obtendremos una nueva cifra de relación, a saber, la *rendición específica de explotación económica* [5]:

$$R_2 = \frac{U_0 - S}{H_e} \qquad [98]$$

(1) En alemán, *der Ertrag*.
(2) » » , *der Aufwand*.
(3) » » , *die finanzielle Rentabilität*.
(4) » » , *die Selbstkosten*.
(5) » » , *die Betriebswirtschaftliche Rentabilität*.

Finalmente, cuando relacionemos la misma ganancia del monto de transacciones con el monto neto total de las transacciones, estableceremos una referencia *unitaria* de dicha ganancia, que prestará servicios en la equiparación de ejercicios. La fórmula será:

$$R_3 = \frac{U_0 - S}{U_0} = 1 - \frac{S}{U_0}. \qquad [99]$$

92. — Volvamos a la expresión [98]. Por ciento, como

$$\frac{r_2}{100} = \frac{R_2}{1},$$

$$r_2 = \frac{100\ (U_0 - S)}{H_e} \qquad [100]$$

Discriminando:

$$r_2 = 100\,\frac{U_0}{H_e} - 100\,\frac{S}{H_e} \qquad [101]$$

Hemos llamado

$$u = \frac{U_0}{H_e} \qquad [95]$$

y llamaremos *coeficiente de costos*, s, a

$$s = \frac{S}{H_e} \qquad [102]$$

Luego,

$$r_2 = 100\ (u - s) \qquad [103]$$

Este valor r_2—, o también R_2—, es un elemento de relación que acusa la ventaja de una explotación industrial. Cabe parangonarlo con otros valores del mismo origen, establecidos para una misma explotación o dos o más distintas.

Por sí mismo, significa ya que una empresa privada trabaja en condiciones tanto más favorables cuanto más a menudo se renueva la inversión de su caudal efectivo (o sea cuanto más se eleva u) y más se reduce, en vez, la razón de los costos de elaboración y despacho a dicho caudal (vale decir, cuanto menor resulta s).

Dividamos la [95] por la [102]. Obtendremos

$$w = \frac{\text{Monto total neto de operaciones}}{\text{Costos totales de obtención}} . \qquad [104]$$

A esta relación, se le da el nombre de *rendimiento económico*. A diferencia de los rendimientos técnicos, que siempre son menores que la unidad, el económico de toda empresa que trabaja con utilidades es siempre mayor que uno. El coeficiente de « Cargas de venta », es el valor recíproco de w (Mellerowicz, p. 295).

Como, además,

$$w = \frac{u}{s} = \frac{\text{Cifra de evoluciones}}{\text{Coeficiente de costos}} , \qquad [105]$$

debemos recordar que u y s hállanse supeditadas a la clase de la actividad económica de que emergen (comercio o fabricación; clase de comercio o de fabricación) y difieren fundamentalmente para varias maneras de actividad; p. ej., para formas distintas de fabricación. En consecuencia, sus valores no serán equiparables sino para actividades económicas análogas, o para una misma y sola.

Por otra parte, este valor incluye visiblemente una relación de inversiones que derivan de la actividad de las instalaciones industriales, y constituye un medio de considerar el aprovechamiento de esas instalaciones.

Para destacar mejor los conceptos, sigamos a Schulz-Mehrin [1], quien atribuye en primer lugar a una empresa *comercial* los valores

$$H_e = 20.000 \$ \quad ; \quad U_0 = 100.000 \$ \quad ; \quad S = 98.000 \$$$

Es decir que

$$u = 5 \qquad ; \qquad s = 4{,}9$$

y por la [103]

$$r_2 = 100\,(5 - 4{,}9) = 10$$

así como por las [104] y [105]

$$w = \frac{100.000}{98.000} = \frac{5}{4{,}9} = 1{,}02.$$

[1] Revista *Maschinenbau*, artículo « Betriebsvergleiche »; t. 6; cuad. 8°; pág. 397. Berlín, Abril de 1927.

Sean, asimismo, para una empresa *industrial*

$$H_e = 100.000\ \$\ ;\quad U_0 = 120.000\ \$\ ;\quad S = 110.000\ \$$$

Entonces,

$$u = 1{,}20 \qquad ; \qquad s = 1{,}10$$

$$r_2 = 100\,(1{,}20 - 1{,}10) = 10$$

$$w = \frac{120.000}{110.000} = 1{,}09\,.$$

Las utilidades específicas porcentuales son iguales en las dos empresas, a pesar de la notable diferencia de los caudales empeñados. La causa emerge de la comparación de los valores de u y s.

Si en otra fábrica de igual producción que la precedente, obtiénense los siguientes valores:

$$H_e = 100.000\ \$\ ;\ U_0 = 118.000\ \$\ ;\ S = 105.000\ \$$$

$$u = 1{,}18 \qquad ; \qquad s = 1{,}05$$

$$r_2 = 100\,(1{,}18 - 1{,}05) = 13$$

$$w = \frac{118.000}{105.000} = 1{,}12\,.$$

A pesar de su menor monto de operaciones, la segunda fábrica rinde más que la primera, en razón de sus menores costos de producción. Los rendimientos económicos poco difieren, si bien es igualmente mayor el de la segunda empresa.

Las causas de estas diferencias son investigadas tras la obtención de las mismas, y podrán hallarse, v. gr., en una economía mayor de los costos de despacho en el segundo caso.

93. — Razonando acerca de la rendición o utilidad específica r_2, se observa que el requisito, acusado por las fórmulas [100] y [101], de que la prosperidad de una empresa se apoye en el mayor valor posible de u, tiene el mismo significado que el firme requisito moderno de alcanzar la *producción acelerada*, es decir, el apresuramiento mayor

posible de los suministros y de las elaboraciones, de una parte, y la salida (despacho o venta) pronta de los productos, sin recurrir a los acopios ni al almacenamiento. Estas dos condiciones no son igualmente fáciles de cumplir.

La aceleración de la producción está más en poder de la empresa que la del despacho, cuya marcha y desarrollo hallan un límite en la *capacidad de absorción* del mercado. Mas, contenida la salida de los productos, fuerza es regular por ella a la producción, puesto que los productos almacenados vinculan más capital a su producción y causan más costos por intereses que los productos en curso de elaboración. El aumento de II_e que con ello se origina (ver cuadro fig. 1) empequeñece el valor de u con más intensidad que la reducción de U_0 en la elaboración menos presurosa.

Denota asimismo claramente el primer término del segundo miembro de la [101], que el efecto antedicho producese con la aceleración relativa a la hacienda total, y no cuando el apresuramiento pónese en la actividad que moviliza únicamente un caudal parcial: p. ej., el empeñado en la sola elaboración. Esta consideración no debe pasarse por alto.

94. — La rapidez o mejor *velocidad de la producción*, útil cifra de cotejo, exprésase mediante la relación

$$u_f = \frac{\text{Monto anual de los productos fabricados}}{\text{Caudal de elaboración}} \qquad [105\,a]$$

que introduce en el numerador la cantidad de los productos elaborados, en vez de toda la suma de valores contenidos en U_0. Esa cantidad es susceptible de dos apreciaciones:

una, en medida cuantitativa material, es decir, por pieza, kg, etc.;

otra, en dinero, que tiene sobre la primera la ventaja de hacer de u_f una cifra abstracta.

Para obtener el segundo resultado, serán aplicados a las cantidades en especie los costos de elaboración o ejecución; mas, si hubiese el propósito de equiparar la velocidad u_f con la cifra de evoluciones, u, la producción material anual será estimada por aplicación de los precios de venta, desde que en u, el monto de operaciones es igualmente contabilizado en precios de venta. Serán de estimarse, enton-

ces, los precios de venta que corresponderían a la parte de la producción no vendida aún al tiempo de realizar el cálculo.

Desde que u u u_f son cifras abstractas, cabe confrontarlas. Cuando a ello se procede y resulta

$$u < u_f ,$$

queda evidenciada una disparidad de marcha. Significa ésta que el despacho o salida de los productos no se desenvuelve en concordancia con la fabricación, y se buscarán los motivos que para ello existan, en procura de alcanzar la situación normal

$$u = u_f .$$

Como las economías en la elaboración y en la explotación, se fundamentan igualmente en la propiedad de los abastecimientos de materias primas y auxiliares y en el acierto de su manutención y distribución, cosas todas que deben hallarse reguladas en cuanto sea posible de antemano, esta consideración queda implícita en las precedentes. Puede modificar su manera de ser la perspectiva que alguna vez ocurre de alguna especulación con los materiales que no sean totalmente dedicados a la fabricación.

95. — El estudio relativo a la inversión de los materiales o materias de elaboración, puede también efectuarse separadamente. Conducirá, entonces, a una cifra característica de cotejo la relación que se establezca entre el valor de los materiales entregados a la elaboración y el capital insumido en la disponibilidad de los mismos.

El coeficiente valdrá

$$\frac{\text{Monto de los materiales en operación}}{\text{Capital invertido en la disponibilidad de materiales}} \qquad [106]$$

y evidentemente convendrá que resulte lo más grande posible.

96. — Como segunda exigencia principal para la prosperidad de una empresa, dedujimos que s debía ser mínimo. Concíbese que este resultado no puede derivar del aumento de H_e, porque esta cantidad es a la vez denominador de la [95], y u y s, entonces, disminuirían de consuno. Sólo cabrá, pues, reducir S, o sea los costos de obtención. Este resultado no se alcanzará discrecionalmente. Un

determinado monto de operaciones, señala una medida determinada para los costos, tanto para proveer los valores transmutados, o costos de producción (o explotación), como, por otra parte, para realizar el giro de los negocios, vale decir, para hacer frente a los costos del despacho. Ambos grupos de costos no pueden reducirse sino dentro de ciertos límites, en proporción al monto de operaciones.

Monto neto total de operaciones, entonces, caudal de explotación y costos de obtención, habrán de responder a las expresiones [100] y [101], y de relacionarse conforme a las mismas de manera que r_2, se torne máxima.

Señalado un monto para la hacienda H_e, la velocidad posible de la producción da la pauta del monto neto total anual de operaciones, U_0, y éste, a su vez, rige los costos, S.

Se advertirá que también el valor s, como antes lo manifestamos análogamente para w, expresa un aspecto de la actividad industrial en el que están contenidos los servicios prestados por las instalaciones, y suministra uno de los varios medios de apreciar la magnitud del aprovechamiento de éstas.

97. — La fórmula [101], pese al importante significado que asume en la economía industrial, no vincula sino tres factores fundamentales de ésta, que aun pueden resumirse a dos por sus caracteres, a saber; *hacienda; costos.* Nada destacan los términos de esa fórmula de las particularidades de esos factores en cada caso. Así, no consideran la relación entre los caudales fijo y circulante; ni la proporción en que se hallan, en los costos de obtención, los costos *de capital* y los *de elaboración* o *trabajo.*

Ya veremos, en lo sucesivo, que es posible obtener coeficientes de relación que contemplen estos y otros muchos aspectos de la economía de cada empresa, desdoblando en condición más amplia los términos de las expresiones [95] y [102].

98. — Ahora, y como una lógica prosecución del estudio general iniciado desde el número 91, ocupémonos de realzar la manera gráfica y analítica de considerar los cotejos económicos de relación de orden general, propiciada por el ingeniero Dr. F. Kreide, de Charlottemburgo (Maschinenbau, núm. cit.).

Cuando para una empresa industrial que cuente con más de un *ejercicio* de actividad, se construye (fig. 3) el gráfico que refiere los rendimientos económicos, w, a las cifras de evoluciones, u,

correspondientes, obtiénese una curva como la I, tan útil para la crítica de los propios y sucesivos ejercicios de aquella empresa, como para comparaciones con las similares de otras más. Esa curva, en efecto, contempla las variaciones que experimentan simultánea y

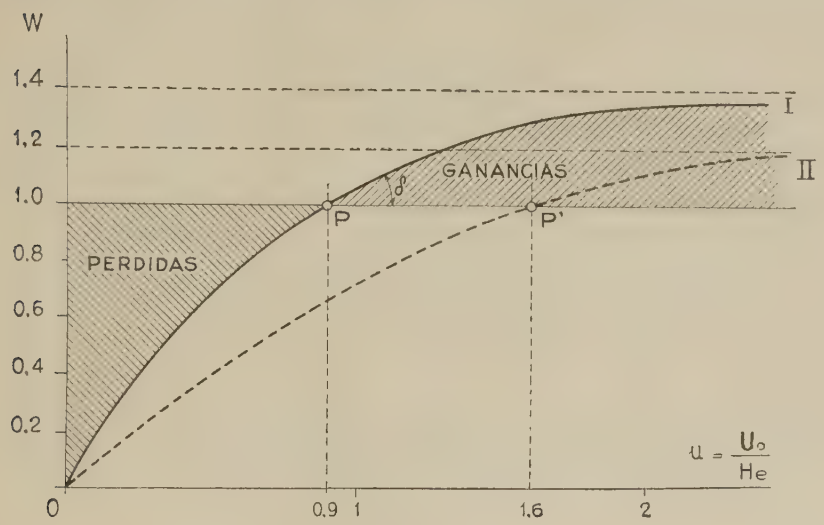


Fig. 3.

continuamente los valores de U_0, S y H_e, en atención a las relaciones que conocemos.

Desde que el valor

$$w = 1$$

establece el deslinde entre los ejercicios económicos con pérdidas y los que dan utilidades (n° 92), una curva como la I denota que la empresa a que se refiere entra en la zona de las ganancias cuando su cifra de evoluciones es

$$u = 0{,}9.$$

Las zonas de ganancias y de pérdidas, están rayadas en la figura. La posición del punto P constituye, pues, un elemento singular para la economía de aquella empresa.

Para otra empresa, se obtendrá por igual procedimiento la curva II, cuyo punto singular, P', corresponde a la abscisa $u = 1{,}6$. La empresa no opera visiblemente en condiciones económicas tan favorables como la anterior. Se averiguará a qué factores debe atribuirse esta situación.

Digno de notarse es que el cuociente diferencial

$$\frac{du}{dw} = \operatorname{cotg} \delta = \frac{\frac{U_0}{H_e}}{\frac{U_0}{S}} = \frac{S}{H_e} = s \qquad [107]$$

mide precisamente el coeficiente de costos, s.

El empino de la curva sobre el eje de las u, da rápido concepto y medida de la economía de la empresa, la que, en general, será tanto más favorable cuanto más pronto se eleve esa curva sobre dicho eje, y se aproxime a la vez al de las w.

La utilidad específica, a mérito de la [107], puede escribirse

$$R = u - s = u - \frac{du}{dw} \qquad [108]$$

expresión de la cual destácase otra vez que en la economía de toda empresa, tiene prioridad la cifra de evoluciones como factor respecto del coeficiente de costos, que deriva de la relación de los incrementos de la misma y del rendimiento económico.

99. — Cotejos de relación global. — II. — *Conceptos de organización y aplicación del capital.* — Las definiciones de hacienda o caudal y de capital que suministran el número 88 y la fig. 1, ponen de relieve la mayor amplitud del primer concepto y su significado con respecto al segundo. Atentas estas diferencias, comprén-dese que la marcha de una empresa y su cotejo con la de otras empresas, hallen útiles referencias en la consideración de inteligentes relaciones establecidas entre capital y hacienda y entre partes de la hacienda.

Para llegar a fundar estas relaciones, hace falta organizar la hacienda en rúbricas de la contabilidad, adoptando oportunos puntos de vista. El ingeniero Dr. Zeidler (op. et loc. cit.) indica como tales los siguientes:

I. — Objetivo, de acuerdo a las clases de caudal.

II. — Conforme a la pertinencia determinada, calculada o de lugar de las partes del caudal a las divisiones de la explotación o rubros.

III. — Según la *liquidabilidad* [1].

[1] En alemán, *die Liquidabilität*. La posibilidad mayor o menor de realizar o liquidar.

Desde el primer punto de vista, hállase esencialmente establecida la división del caudal de explotación (fig. 1) en

CAUDAL DE EXPLOTACIÓN = CAUDAL DE INSTALACIONES + CAUDAL CIRCULANTE.

El segundo punto de vista, ante todo, guía la clasificación del caudal activo total (fig. 1) en dos partes:

CAUDAL ACTIVO TOTAL = CAUDAL DE EXPLOTACIÓN + CAUDAL DE ADMINISTRACIÓN.

De lo relativo al tercer aspecto de la organización, trataremos en el número 100.

En atención a los principios que acabamos de exponer, indica el ingeniero Dr. Zeidler (op. cit., n° 40, « Betriebsvergleiche ») las siguientes relaciones que permiten hacer juicio de la organización y de la aplicación del capital:

$$C_1 = \frac{\text{Capital propio}}{\text{Capital ajeno}} \quad \text{(Coeficiente de adeudos; Mellerovicz, p. 295)} \qquad [109]$$

$$c_h = \frac{\text{Capital propio}}{\text{Caudal de explotación}} \qquad [110]$$

$$h_i = \frac{\text{Caudal fijo (de instalaciones)}}{\text{Caudal de explotación}} \qquad [111]$$

$$h_c = \frac{\text{Caudal circulante}}{\text{Caudal de explotación}} \qquad [112]$$

Tan explícitas por su objeto y su naturaleza preséntanse estas relaciones, que no nos detendremos a aclararlas.

100. — COTEJOS DE RELACIÓN GLOBAL. — III. — *Concepto de liquidabilidad o fluidez.* — La organización del caudal con arreglo a la naturaleza de sus partes constitutivas, a que se refiriera el primer concepto antes mencionado, puede en alguna circunstancia vincularse con el concepto de liquidabilidad. Es ello así cuando se separan en el caudal de explotación la parte empeñada efectivamente y la que temporalmente permanece inactiva [1], pues esta situación fácil-

(1) En el caudal de instalaciones, puede haber edificios, locales, maquinarias que no presten momentáneamente servicio; en el caudal circulante, personal y rezagos de almacenes inactivos, créditos estancados, etc.

mente lleva a realizar los medios de actividad estancados, o a operaciones de movilización de créditos o de disolución de compromisos de trabajo.

Por lo demás, toda empresa contiene un margen de riesgo, y éste es tanto más ceñido cuanto más fáciles de reducir a dinero son las partes del caudal empeñadas en operaciones.

Dentro de la dificultad que ofrece la clasificación de las partes de la hacienda según la comodidad y presteza con que se presten ellas o no a ser realizadas, pueden suministrarse algunas indicaciones que siquiera guían el criterio respectivo. En general, son difícilmente realizables algunas materias brutas de comercio poco difundido; los productos inconclusos; las mercaderías en elaboración, los modelos, los rezagos o residuos de fabricación. De la misma condición son los créditos dudosos, en atención a la situación económica, los terrenos, los edificios, las instalaciones.

En cambio, suelen prestarse a una pronta y cómoda realización las materias primas usuales en el comercio (tanto principales como accesorias); los productos elaborados corrientes; los títulos.

Las deudas que son partes del pasivo, igualmente deben clasificarse por su favorable o desfavorable condición para ser liquidadas. Se las divide al efecto en *deudas a corto plazo*, exigibles o resolubles con prontitud, y las *deudas a largo plazo*, que no se liquidan con tanta presteza. Del primer género son las letras de cambio y las deudas por mercaderías; del segundo, las obligaciones y otros empréstitos.

El detalle de todas estas partes se concreta en las cuentas de la contabilidad.

Señala el ingeniero Zeidler tres relaciones que contemplan las circunstancias de facilidad para liquidar una empresa, a saber:

$$l_1 = \frac{\text{Fondos disponibles} + \text{Créditos}}{\text{Compromisos a corto plazo}} \qquad [113]$$

$$l_2 = \frac{\text{Caudal circulante}}{\text{Compromisos a corto plazo}} \qquad [114]$$

$$l_3 = \frac{\text{Compromisos a corto plazo}}{\text{Compromisos totales}} \qquad [115]$$

También estas cifras de relación son lo suficientemente explícitas.

101. — COTEJOS DE RELACIÓN GLOBAL. — IV. — *Concepto de velocidad de conmutación de valores.* — En verdad, el concepto relativo a la rapidez o velocidad con que ocurren las conmutaciones de valores en una industria, tanto puede abarcar la totalidad de las operaciones en esa industria como una parte determinada de las mismas.

A la condición global responden, entre otros, los coeficientes de relación siguientes:

$$v_1 = \frac{\text{Monto total neto anual de transacciones}}{\text{Capital propio}} = \frac{U_0}{C} \quad [116]$$

$$u = \frac{\text{Monto total neto anual de transacciones}}{\text{Caudal de explotación}} = \frac{U_0}{H_e} \quad [95]$$

cifra de evoluciones, esta última, cuyo objeto e importancia ya conocemos (nº 90).

De concepto análogo, pero más restringido, son las dos cifras de relación que señala el ingeniero Dr. Zeidler (op. et loc. cit.).

$$v_2 = \frac{U_0}{\text{Existencias medias de productos}} \quad \begin{matrix}\text{(Coeficiente de salidas;}\\ \text{frecuencia de giro.}\\ \text{Mellerowicz, p.215).}\end{matrix} \quad [117]$$

y $$v_3 = \frac{U_0}{\text{Monto medio de créditos}} \quad [118]$$

102. — COTEJOS DE RELACIÓN PARCIAL. — *Concepto del aprovechamiento de las instalaciones.* — Este concepto, en la industria, tiene una significación importante. El aprovechamiento de las instalaciones, a más de importar una medida de la conveniencia y de la utilidad de las mismas, señala aspectos particulares de sumo interés para regir la aplicación.

Hemos indicado anteriormente, al pasar, dos cifras de relación (fórmulas [102] y [104]) que incluyen el concepto a que nos referimos.

Además, prestan oficio de carácter particular con análogo fin las siguientes, que indica Zeidler (op. et loc. cit.)

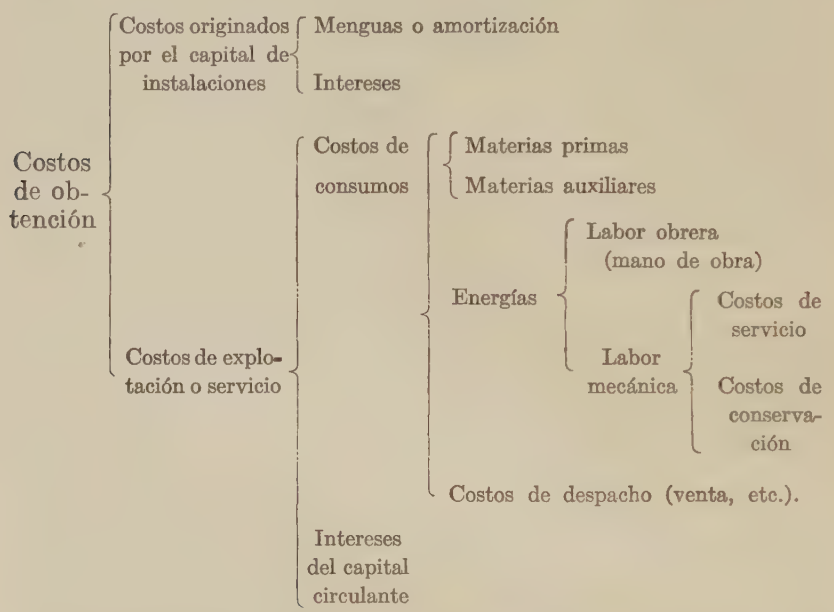
$$a_1 = \frac{U_0}{\text{Caudal de instalaciones}} \quad [119]$$

$$a_2 = \frac{\text{Costos comunes por tiempo}}{U_0} \quad [120]$$

$$a_3 = \frac{\text{Costos de despacho}}{U_0} \quad [121]$$

103. — Cotejos de relación parcial. — *Concepto de los costos de obtención.* — El estudio de los costos de obtención [1] constituye el objeto capital de la Contabilidad de la explotación industrial.

Para exponer más sintética y claramente los lineamientos que toman en cuenta las equiparaciones de relación en materia de costos de obtención, presentamos un cuadro de formación de estos, en el caso general.



De esta organización general, escoge Schulz-Mehrin (en Maschinenbau, número de Abril 21 de 1927) los tres rubros de costos de consumos que dispone en grupos parciales, a saber:

Costos de materias
Costos de elaboración (transformación de materias en productos).
Costos de despacho (venta, etc. de los productos).

104. — La operación de equiparar costos de materias, bien se lleve a cabo directamente o por relación, presenta un interés económico subordinado en tanto gire alrededor de los precios de adquisición, pues considerados bajo el aspecto de la economía de la explo-

(1) En alemán, *die Selbstkosten.*

tación, son esos precios de naturaleza eventual. Dependen, p. ej., de la constitución y de la forma de ejecución del producto, así como de la elección que se haga de la clase de la materia.

Hay, no obstante, interés para la economía de la explotación en cotejar los costos ordinarios de materias, vale decir, los de compra, almacenamiento y administración de materias, como son los sueldos, salarios, amortizaciones, intereses, etc. Conviene referir estos costos a los de adquisición, estableciendo una cifra de relación.

$$\frac{\text{Costos ordinarios de materias}}{\text{Precio de compra de materias}} \qquad [122]$$

Asimismo, pueden referirse los costos ordinarios de materias a la unidad de cantidad o de peso de esas materias, obteniendo respectivamente el costo ordinario de materias por kilogramo, pieza, metro cuadrado, etc.

105. — Mucho más importante es la comparación de los costos de elaboración, que abarcan los

$$\text{Costos de elaboración} \left\{ \begin{array}{l} \text{Costos de la mano de obra} \\ \text{Costos de instalaciones} \end{array} \right\}$$

A los costos de mano de obra pertenecen todos los sueldos, salarios y costos auxiliares de personal. (Seguros del personal; expensas de atención sanitaria; subsidios de vacaciones y traslados, etc.).

Este grupo involucra, además, las partes de costos dependientes en forma prevaleciente de los de mano de obra, tales en particular como los intereses del capital circulante invertido en salarios, sueldos y costos accesorios de personal, mientras dichos salarios, sueldos y costos correspondan a los productos total o parcialmente elaborados.

Los costos de instalaciones incluyen ante todo las amortizaciones y los intereses del capital de instalaciones. A estos valores súmanse los de seguros de instalaciones, costos del material de explotación como carbón, energía, máquinas y herramientas, correas, materias de lubricación y calafateo, material de reparaciones.

Los costos de trabajo y las instalaciones, y más particularmente los salarios y sueldos por un lado y las amortizaciones y los intereses del capital de instalaciones, por el otro, ejercen entre sí en cierta medida una acción recíproca. Deriva ello de que especialmente los costos de mano de obra y con más precisión los salarios, son tanto

más reducidos cuanto más amplio y mejor es la obra de la maquinaria; de consiguiente, esos salarios bajos corresponden a costos de instalaciones más elevados. Y recíprocamente.

Cuanto menor es la suma de los costos de mano de obra e instalaciones, en tanto más favorable condición trabaja la industria. Este aspecto directo no es el único que evidencia tal condición. Las cifras de relación ya conocidas por las [101] y [102], tienen desde luego que ver con la misma; mas, aún falta sentar otra más particularizada, que da el cuociente

$$\frac{\textit{Costos de elaboración}\ (\text{trabajo} + \text{instalaciones})}{\textit{Caudal empeñado en la elaboración}} \qquad [123]$$

Ha de tratarse de que esta cifra de relación, a la que puede llamarse *coeficiente relativo de los costos de elaboración*, se torne mínima en la explotación. El interés primario de este aspecto, no necesita explicación.

Schulz-Mehrin (op. et loc. cit.) propone asimismo la formación de un coeficiente similar *simplificado*, sentando la relación

$$\frac{\textit{Salarios} + \textit{Sueldos} + [(\text{Amortizaciones} + \text{Intereses})\ \text{de instalac.}]}{\textit{Capital de instalaciones}} \qquad [124]$$

Fundamenta este criterio en el hecho corriente de que los salarios y los sueldos son las rúbricas esenciales de los costos de trabajo, a los cuales puede tenerse por proporcionales los costos por sueldos y salarios empleados en los productos en curso de elaboración o terminados; y de idéntica manera, cabe admitir la proporcionalidad a los costos principales de amortización e intereses de las instalaciones, de los costos accesorios a que dan éstas lugar, como los de seguros y materias de explotación.

En los costos de instalaciones, intervienen para:

Terrenos: Los intereses del capital que se invierte en ellos;
Edificios: Lo propio y amortización;
Maquinaria y otros elementos: Lo propio y amortización.

Estas partes no pueden englobarse en cifras medias, porque varían mucho de uno a otro caso.

106. — *Los costos de despacho*, dependen del monto de las transacciones, y conviene de consiguiente establecer la cifra de relación

que expresa el importe de aquéllos por unidad del monto U_0. Tenemos, así, el valor de a_3, fórmula [121].

Mas, también es útil sentar la relación

$$\frac{\textit{Costos de despacho}}{\textit{Costos totales de obtención}} \qquad [125]$$

107. — La equiparación aislada de los costos de materias, de elaboración y de despacho, observa Schulz-Mehrin, es consecutiva de la separación con que estos grupos de costos son considerados en la contabilidad industrial. Es razonable, entonces, que también contenga cada grupo con peculiaridad los costos generales atinentes, a cuyo efecto ha de realizarse de la partida conjunta una repartición fundada. A manera de ejemplo, dice el citado autor, deben los sueldos del constructor, en las fábricas de maquinaria, ser atribuídos a la elaboración en tanto constituyen la retribución pertinente a la construcción de productos para venta y de aparatos; mas, cuando recaigan en diseños de proyectos o para ofertas, pasarán a gravitar entre las cargas del despacho.

Las amortizaciones de las instalaciones, también deben distribuirse conforme a su natural significación, vez por vez.

En cambio, los impuestos, los gastos de correspondencia (franqueos), las costas judiciales y otras análogas, serán íntegramente cargadas al despacho.

La corrección, con todo, de estas reparticiones, ha de ser más uniforme que absoluta.

Estos mismos principios, son aplicables a los rubros diversos comprendidos en las tres secciones antes consideradas.

Cuando, por otra parte, la Contabilidad no haya logrado la uniformidad distributiva, los solos cotejos viables serán los que consideren el conjunto de los costos.

Los cotejos de costos por clases: sueldos, salarios, material auxiliar, amortizaciones, etc., son de ordinario factibles porque existe concordancia acerca del concepto y del cómputo de los mismos.

La comparación, bien puede efectuarse directamente entre montos totales, o por referencia a los llamados *costos de terminación* (en alemán, « Veredlungskosten »), es decir, al conjunto de los costos con abstracción de los de adquisición de materias, o a una u otra clase particularmente característica de costos, como los salarios de elaboración, o también a un grupo de costos elementales, como son los de salarios y sueldos y la amortización e intereses del capital de instalaciones.

De entre estos varios rubros de referencia, los más utilizados han sido hasta el presente los *costos totales* y *los salarios de elaboración* (productivos). El empleo de los primeros no parece aconsejable, porque engloban los costos de materias, cuyo monto. como ya se adujo (n° 104), carece de significación importante para la conducción de la explotación. La relación a los salarios de elaboración, resulta aún menos aconsejable. Es posible establecerla para las distintas clases de costos (« Kostenarten »), en el decurso de la actividad de una misma empresa, siempre que a la vez quede debidamente contemplada la influencia correlativa del *grado de empeño*, de las alternativas de los precios y de otras circunstancias eventuales. Mas, entre empresas distintas, la validez de los cotejos de relación entre otras cifras, no es admisible sin más.

108. — Una correlación de concepto similar a la que viéramos (n° 105) entre salarios de elaboración y costos de instalaciones, existe entre aquellos salarios de una parte y los sueldos y salarios auxiliares, de otra parte. Observa Schulz-Mehrin que algunas labores antes pertinentes de los obreros, son abreviadas o aún substituídas en totalidad por las de empleados dedicados a la prevención de las tareas y a la organización científica de la explotación. Trae esto un crecimiento del monto de los sueldos y una rebaja del monto de la mano de obra.

Hechos similares influyen en los montos de los salarios auxiliares.

En suma, la relación entre sueldos, salarios auxiliares y otros costos a los salarios de elaboración, es muy variable y las cifras de relación no tienen segura propiedad para cotejos. Cuando se las empleare, ocurrirá tener presente el equipo de cada empresa y la organización de ésta, para salvar errores de consideración.

BREVE ENSAYO SOBRE DON PEDRO DE CIEZA DE LEÓN Y LOS CARACTERES DE LA CONQUISTA INCAICA

POR

ALBERTO M. SALAS

(Continuación)

Cieza, como todos los conquistadores, es un cristiano ferviente, casi un fanático, que en su época y en su patria, protegida celosamente por la Inquisición, era cosa corriente y natural. Posee, ya lo hemos dicho, alma grande y generosa, que al conmoverse y protestar por la destrucción del Imperio Incaico, adquiere así algunos matices de ese hombre que Blanco Fombona ha llamado « héroe moral » (1) que juzga a sus contemporáneos y procede dentro de su época guiado por principios espirituales que no pertenecen a ella. Pero es la primera condición, la de cristiano, quien contradice las amonestaciones que formula impulsado por su piedad artística, estremecido al ver sucumbir los bellos monumentos, la que nos hace pensar en lo anacrónico de estas censuras, no sólo de Cieza, del padre Las Casas y de otros muchos.

Véase como reacciona Cieza de León, ante la destrucción del *Sacsahuaman,* (que fué cantera pública hasta el año 1900) (2) la cicló-

(1) Rufino Blanco Fombona, « Psicología del Conquistador Español del Siglo XVI », X, 109 y 110, *Revista de Filosofía,* Bs. As., enero de 1921.

(2) Luis E. Valcárcel, « Sajsawaman (sic) Redescubierto ». *Revista del Museo Nacional de Lima,* Tomo III, Nº 1-2, Lima, Perú.

Dice el autor refiriéndose a los baluartes superpuestos del Sacsahuaman: « Mucho se ha destruído la fábrica del fuerte en este sector; la facilidad de rodar las moles hacia el valle de Sapi lo explica. Todavía se puede ver en algunos monolitos las perforaciones para aplicar el explosivo. Hasta 1900 seguía siendo una cantera ». Esto, sin embargo, no impidió que el autor dijera que: « Sajsawaman ha sido redescubierto. Cuatrocientos años después que la impía acción del conquistador lo sepultó, vuelve a la luz. Simbólica reaparición que se debe interpretar como secreto designio de la raza ».

pea fortaleza cuzqueña: «..pues los españoles lo han ya desbaratado y parado tal, cual yo no quisiera ver la culpa grande de los que han gobernado, y que una cosa tan insigne se hobiera desbaratado y derribado, sin mirar los tiempos y sucesos que pueden venir y que fuera mejor tenerla en pie y con guarda» (1). Y aquí torna nuestro cronista a ser el hombre que se detiene ante los hechos sin tratar de comprenderlos ni de explicarlos, el que olvida de manera sorprendente las causas que movieron la destrucción española del *Sacsahuaman*: el temor de que los indígenas se ganasen en la fortaleza y repitieran la denodada resistencia de *Manco,* las fábulas de tesoros escondidos en ella, y hasta el rumor muy generalizado que láminas de oro y plata cimentaban sus piedras. No queremos a nuestra vez olvidar que fueron muchos los sillares labrados con sus bloques monolíticos y empleados por los españoles en sus edificios; pero aparte de lo dicho anteriormente acerca del uso de estas piedras históricas del *Sacsahuaman* en épocas recientes, debemos hacer constar, en descargo del conquistador, que hasta hace muy pocos años, las ruinas de *Tiahuanaco* eran sistemáticamente explotadas por una empresa de construcciones. Quien tal cosa me testimoniara, el profesor Francisco de Aparicio, ha visto en la ciudad de la Paz, alguna casa construída con tan precioso material.

Aun apreciando en su justo valor la nota que Jiménez de la Espada dedica a estas manifestaciones, transcribiremos algunos párrafos que lícitamente podemos referir al *Sacsahuaman,* escritos por quien como el Inca Garcilaso sobrado derecho tenía a la indignación. « En muchas casas reales y templos del Sol echaron plomo derretido, plata y oro por mezcla. Pedro de Cieza, capítulo 94, lo dice también, que huelgo alegar los historiadores españoles para mi abono. Echábanlo para mayor majestad, lo cual fué la principal causa de la total destrucción de aquellos edificios, porque por haber hallado estos metales en algunos de ellos, los han derribado todos buscando oro y plata». (2) Más parecen estas palabras de español que desea justificar a sus compatriotas, que no de un mestizo, que ama y se enorgullece de la sangre india que late en sus venas, que debió sentir más profunda y sinceramente que Cieza el dolor de ver abatidos por los suelos los edificios que levantara el genio de sus mayores, lo cual no impide, he aquí la paradoja, que sea su juicio más ecuánime y atento a la verdad que el del hispano.

(1) Cieza, *ibíd.*, LI, 194.

(2) Garcilaso de la Vega, *ibíd.*, t. I, XXVIII, 188 y 190.

La destrucción del *Sacsahuaman* y de tantos otros edificios incaicos, verdaderos cíclopes de quienes hoy sólo queda la huella de las plantas, fué causada, sí, por el oro, por los sillares bien labrados, por el temor. ¿Puede ser éste un estigma irredimible para los conquistadores del Perú, para toda una nación? ¿Pretenderemos que ellos procedieran como arqueólogos del siglo XX? ¿Diremos acaso que es una falta gravísima, excepcional en la historia, deshacer las fuertes hiladas de piedra para construir las catedrales de aquella fe exaltada, para buscar en sus juntas el metal codiciado?

Pero esto no nos incumbe, dejemos que lo contesten quienes siguen juzgando al conquistador con despechos raciales, con la psicología anacrónica de este siglo.

Muy otra es la actitud de Cieza y su opinión ante la destrucción de cuanta « guaca » y templo incaico había en el Perú. Aquí es de nuevo el hombre de su siglo de intransigencias religiosas, aquí es donde olvidado de los bellos aparejos de piedra y bien acordados muros de adobe, canta un aleluia a la obra de la piqueta. Las protestas que levantara movido por la belleza de la fortaleza y por los atropellos hispánicos, las anula la alegría del cristiano. Veamos cómo se expresa: « Los templos antiguos, que generalmente llaman guacas, todos están ya derribados y profanados, y los ídolos quebrados, y el demonio, como malo, lanzado de aquellos lugares, a donde por los pecados de los hombres era tan estimado y reverenciado; y está puesta la cruz. En verdad, los españoles habíamos de dar siempre infinitas gracias a nuestro Señor Dios por ello » (1).

Expresiones semejantes a ésta, hija legítima de una época, no cansará el labio de decirlo, hasta que lo entiendan quienes se abroquelan en prejuicios y odios inconcebibles, podrán hallarse en muchos pasajes de la Crónica, pero ninguna como ella reflejará tan nítidamente la satisfacción del cristiano hincando la cruz allí donde señoreara la divinidad gentílica.

Cieza sólo supo de fe; las destrucciones que ella causaba no son para él destrucciones. Acaso *Pachacamac* y *Curicancha* no le impresionaran tanto como el *Sacsahuaman,* tal vez no reparara en lo que se hacía, cegado por el placer de exorcizar los demonios de aquellas piedras. En cambio, oprobio, iniquidad singular, es el destruir por oro, por sillares y temores. La poca experiencia histórica, las escasas lecturas, hicieron creer a Cieza y a muchos otros, que

(1) Cieza, « La Crónica... », LVII, 190.

estos excesos podían haberse evitado, sin ocurrírseles pensar, que era la fe, arrasando templos, guacas y ortorios, la que humillaba y abatía una raza, más que despojándola de su oro, y derruyendo sus fortalezas. El hombre es siempre el mismo, acentuado en algunas pasiones, en algunos sentimientos, menguado en otros, según las épocas. El fanatismo y la codicia convivieron en el espíritu inquieto de aquellos conquistadores, muy osados de enviar, como un Aguirre, carta de desafío a su Rey. Justificar y comprender las ruinas que provocó el uno (¿acaso más moral?) es justificar y perdonar las que ocasionó la otra, pasión tan fuerte como aquella, más adherida al hombre, que le acompaña a través de la Historia, que fué capaz de vencer la fe y el respeto cristiano de los saqueadores de Roma.

Las críticas de Cieza, pues, son harto relativas, carentes de serenidad, de comprensión humana, de franqueza, de esa misma franqueza que hace decir a uno de nuestros investigadores: « Y si fuéramos a indagar en los tres o en los seis mil años anteriores (a nuestra era), en las tierras de chinos e indostánicos, judíos y fenicios, egipcios y caldeos, celtas y lapones, habríamos de conjugar los mismos verbos: invadir, saquear, someter, desmembrar, destruir, fundar...

Aceptemos, pues, la conclusión de que esas superposiciones de Imperios penosamente formados y dolorosamente deshechos, constituyen los ineludibles anales de nuestra bárbara, insensata y heroica Humanidad ». (1)

Que gima, sí, desde la Historia, la amargura resabiada de una raza vencida en el choque inevitable de las civilizaciones.

(1) Levillier, Roberto, *ibíd.* Libro II, 150.

SEGUNDA PARTE

LA CONQUISTA INCAICA

CAPITULO PRIMERO

A) Las Behetrías

Previo al estudio de los caracteres de la conquista incaica, se impone como imperativo ineludible, la consideración del estado cultural aborigen antes de la conquista y hegemonía de los incas.

De manera casi unánime afirman los cronistas, que con anterioridad a ella, los naturales que habitaban las tierras que constituirían el gran imperio, eran behetrías. Asegura Cieza a este respecto, «..que todos vivían desordenadamente y que muchos andaban desnudos, hechos salvajes, sin tener casas ni otras moradas que cuevas de las muchas que vemos haber en riscos y grandes peñascos de donde salían a comer de lo que hallaban por los campos», (1) agregando a esto en otro pasaje, que «...eran muy bestiales y que comían carne humana» (2). La existencia de este estadio cultural, al cual no sin ciertas reservas, llamaremos «salvaje», dando a la palabra su significado vulgar, se ve ampliamente corroborado por las crónicas de Sarmiento, Pedro Pizarro, Bernabé Cobo, Acosta y Garcilaso, particularmente de este último, que en un todo de acuerdo con la descripción de Cieza, transcribe íntegramente el capítulo XXXVIII de la Crónica, donde trata este asunto (3). Pero la palabra behetría, o mejor dicho, el estado de behetrías, no tiene para los autores citados, significado idéntico. Mientras que para Pizarro, Cobo, Cieza y Garcilaso, es sinónimo de carencia de un orden político, social y hasta moral, o de una organización en pequeños estados, tribus, como quiere Acosta (4), para Sarmiento de Gamboa

(1) Cieza, «Segunda Parte...», VI, 2.

(2) Cieza, «La Crónica...», XXXVIII, 117.

(3) Garcilaso, *ibíd.*, t. I, XXXVI, 252 a 257.

(4) Joseph de Acosta, «Historia Natural y Moral de las Indias», t. 2º, 46, Madrid, 1894.

significa la ausencia de una autoridad política, sólida y permanente, acepción ésta, que atribuyendo a los individuos un estado de « simple libertad » hizo, a no dudarlo, más evidente la « tiranía » que los incas implantaron sobre estas behetrías, cosa que facilitó en mucho la demostración de su tesis. Vemos, pues, que mientras el interés de Sarmiento supone un estado cultural y social en el cual cada individuo goza de una libertad ideal, que destruirán los incas, el error y la deficiente información de los otros, que en Garcilaso puede ser tendenciosa, nos presentan a los incas civilizando y arrancando, *a todos* aquellos pueblos, de la barbarie en que se debatían. El error como acontece a menudo en estas materias, nace de la generalización. No todos los pueblos peruanos, anteriormente a los grandes conquistadores cuzqueños, fueron behetrías, ni salvajes, ni incultos, ya que, como lo demuestra la arqueología, no fué poco lo que asimilaron los incas de las culturas avasalladas; de las culturas de litorales, por ejemplo. Mucho costaría en verdad, concebir a la civilización incaica como una « ínsula cultural », perfectamente aislada y que no reconociera tributarismos de ninguna especie. Para desvanecer la opinión errónea de los que suponen la existencia de una behetría general, bastaría mencionar solo dos nombres, *Pachacamac* y *Tiahuanaco*.

Que en el Perú hubo behetrías es cosa tan innegable como el afirmar que existieron en territorio argentino, donde las culturas de la pampasia y del litoral, lo parecerían ante la del Noroeste, que a su vez, comparada por Cieza u otro cronista, con la incaica, recibiría de ellos idéntico calificativo.

La misma topografía peruana, pródiga de caracteres de aislamiento, permitiría la formación de centros demográficos nítidamente separados y el avecindamiento de culturas bien dispares y hasta de contrastes vigorosos. No se crea por esto que Cieza y otros cronistas, ignoraron la existencia de algunos pueblos poseedores de un patrimonio que mucho les acercaba a los incas; hasta el mismo Cieza nos ha dejado de los *Yuncas* una descripción que en nada los aviene con las behetrías. Además, ha conocido y admirado las ruínas de *Tiahuanaco,* confesando que ni los incas sabían dar razón de quienes habían sido sus constructores, y con seguridad que no pensaría Cieza que gentes sin arreglo ni gobierno fueran capaces de elevar un recinto como el de *Calasassaya,* tallar una Puerta de Sol, o arrancar los monolitos de *Accapana.* Con todo, estos conocimientos son circunstanciales, y nada concluyeron de ellos, tímidos ante la conje-

tura. Ignoraron, cuando menos en su antigüedad, a la extinta cultura Protochimu, no conocieron el arte de sus maravillosos vasos retratos, ni dedujeron cómo se ha hecho en la actualidad, de la decorada cerámica, su vida y sus costumbres; tampoco pusieron en duda cómo la moderna arqueología, que *Sacsahuaman* ni *Ollantay Tambo* fueron construídos, siquiera por *Manco Capac*, el más antiguo de los reyes Incas. En fin, que hijos de su siglo, creyeron en la aparición espontánea de una cultura como la incaica en medio de un páramo; una flor de loto nacida en el fango. Aun olvidándonos de los argumentos intangibles que proporciona la arqueología, las behetrías que describen algunos cronistas, Cieza, v. gr. refiriéndose a los *Yuncas* y diciéndonos que eran sus «... señores amigos de regocijos, andaban a hombros de sus vasallos, tenían muchas mujeres, eran ricos de oro y plata...» (1), y el mismo Sarmiento de Gamboa, manifestándose ambiguamente sobre la autoridad temporal o permanente de los *cinches*, capitanes de guerra, son harto contradictorias para que admitamos su difusión general. Cuidaremos mucho, pues, de afirmar que los Incas lucharon y conquistaron para imponer cultura y orden a esas behetrías (Sarmiento dirá lo contrario) sino, su cultura, sobreponiéndola a las que hallaron, que por insuficientes o enervadas, no pudieron resistir su empuje.

B) Causas y métodos de la conquista incaica

El encabezamiento de este acápite encierra pretensiones de tal magnitud, que es necesario delimitar las nuestras con claridad.

Sabido es, que entre los móviles de una conquista, la economía, la religión, las ideas políticas, las pasiones humanas, las más de las veces inconfesas, tienen una importancia y juegan en los hechos un papel, que no siempre se puede distinguir con facilidad, o que por lo menos, puede ser controvertido. No es este el estudio que nos roponemos, sí en cambio, uno más modesto, el de averiguar las causas de la expansión incaica, tal como la supieron los cronistas, sin querer meternos en un estudio filosófico o psicológico, para lo cual, sin embargo sería difícil hallar otras fuentes.

La ambición y la codicia de señorío, pasiones de todos los hombres y de todas las épocas, sin distinción de razas ni de culturas, deben haber sido la causa y el objeto mismo de la mayor parte de las conquistas incaicas; la religión, como dice Prescott, y como nos atre-

(1) Cieza, «Segunda Parte...», LVIII, 219.

vemos a afirmar, un poco contagiados de su materialismo, si es posible llamarle así, era sólo un pretexto y como veremos más adelante, un execelente medio para consolidarla (1). Hemos dicho que la mayor parte de ellas obedecerían a esas causas, entendiendo por ambición en este caso, a la expansión que satisface antes que necesidades materiales a los sentimientos del hombre o del pueblo que la ordena y que la impone. Pero es indudable que esta pasión, que parece tan extraña e inútil a un espíritu moderado y hasta diríamos normal, no ha sido la única causa que movió la guerra incaica. Existió lo que llamaríamos, no sin ciertos temores, la ambición y la codicia de lo útil, de lo imperiosamente necesario.

Paréceme indudable que las primeras conquistas que emprendió la pequeña tribu incaica que señoreaba en el valle del *Cuzco,* serían impulsadas por el logro de tierras fértiles en que hacer sus sementeras. La misma conquista del *Cuzco,* según la relata Sarmiento de Gamboa y Betanzos, o la pacífica instalación de *Manco Capac* y sus hermanos, como refieren Cieza y Garcilazo deberíase en buena parte a esa misma causa.

No hemos hallado en la crónica de Cieza una sola palabra sobre los motivos de esta política imperialista. El padre Cobo afirma que, «...el título de religión fué nno de los más principales con que guerreaban otras gentes...» (2), lo cual tal vez no estuviera alejado de la verdad, o cuando menos de sus apariencias. Si en este mismo sentido algo podemos deducir lícitamente de la crónica de Garcilaso, es que conquistaron el Perú movidos por el generoso propósito de arrancar a los naturales de sus behetrías. Será difícil hallar en toda la Historia, otro pueblo que desempeñe semejante función civilizadora, como único motivo de conquista, ni tan acabada materialización de sabiduría patriarcal como la que hallamos en su *Manco Capac* y *Mama Oello* poniendo en buena orden y cordura a los naturales del *Cuzco.* La opinión de su antípoda, Sarmiento de Gamboa, es una nueva manifestación de su empeño en hacer de los incas, no solo una casta de tiranos, sino también de ladrones y asesinos. Extraemos de cuantas citas acumulamos en este sentido, y no son pocas, una muy ejemplarizante. « De esta respuesta — de la negativa de prestar obediencia al Inca — se holgaron Topa Inga y los suyos, porque no querían sino hallar ocasión de llevarlo todo a las puña-

(1) Prescott, *ibíd.,* Libro 1º, 83.

(2) Bernabé Cobo, « Historia del Nuevo Mundo », t. 3º, XII, 221, Sevilla, 1892.

das, por poder robar, que era su principal intento» (1). Podría pensarse que esto ocurre sólo con la conquista de *Topa Inga,* pero en iguales términos comenta las que emprendió *Viracocha* (58), *Inca Yupanqui* (74), *Pachacutic* (71), y así de otros que es ocioso mencionar. La visión es desoladora, dijérase que estos incas del cosmógrafo de Toledo, son tigres sanguinarios antes que hombres, y que sólo los mueve a la conquista, el crimen y el pillaje. Refiriéndose a ella Sarmiento Gamboa, es el único de los cronistas españoles que lo hace en términos semejantes.

Si el ansia de dominio o sus credos religiosos, era lo que les impulsaba a avasallar pueblos, ni lo uno ni lo otro priva que los nuevos territorios fueran reorganizados integralmente según los usos y costumbres de los nuevos amos.

Métodos de conquista

Si persiguiéramos, pura y exclusivamente la exposición de un aspecto de la cultura incaica, sin preocuparnos mayormente del valor testimonial de las fuentes, en este tema enunciado, no tendríamos mucho que glosar, puesto que en los métodos de la conquista incaica, nada hay, absolutamente nada de original. Procuraban realizarla ganándose los ánimos y enflaqueciendo la resistencia de los naturales con regalos y promesas, y así «... entraron —dice Cieza— en muchas tierras sin guerra, en las cuales mandaban a la gente de guerra que no hiciesen daño ni injuria ninguna, ni robo ni fuerza» (2). En idéntico sentido se expresa Garcilaso diciendo: «...y antes que moviesen la guerra requerían a los enemigos una, dos y tres veces» (3). Y Cabello de Balboa, quien dice de Inca Yupanqui: «Jamás hizo la guerra a una nación sin hacerle antes dos o tres veces proposiciones de paz, sólo cuando se las rechazaban tomaba las armas...» (4). La primera etapa de la conquista incaica era, pues, de índole pacífica; se trataba de persuadir al presunto vasallo con promesas y dádivas, y más aún, con la amenaza de un ejército poderoso y bien pertrechado, que ya sobre las fronteras

(1) Sarmiento de Gamboa, «Segunda parte de la Historia general llamada Indica...», 89, Berlín, 1906.

(2) Cieza, *ibíd.*, XVII, 60 y 61.

(3) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XII, 77.

(4) Miguel Cabello de Balboa, «Historia del Perú bajo la dominación de los Incas», 35, Lima, 1926.

aguardaba listo para entrar en acción si fracasaban las artes pacíficas.

Cuando la conquista se llevaba por la violencia de las armas, procuraban los Incas, según testimonia Cieza, «...que en los mantenimientos y casas de los enemigos, se hiciese poco daño, diciéndoles el Señor: presto serán estos nuestros como los que ya lo son. Como esto tenían conocido, procuraban que la guerra fuese la más liviana que ser pudiese, no embargante que en muchos lugares se dieron grandes batallas...» (1). Nosotros, por buena lógica, creemos en la veracidad de estas palabras. Aun olvidando alegar en nuestro favor algunas expresiones de Garcilaso, cuyo valor probatorio en este aspecto juzgamos poco valedero, ¿podemos creer que el Inca sistemáticamente destruya y lleve a sangre y fuego todo lo que había de ser suyo? ¿podemos suponer que desvastase y pillase lo que ya constituía su propio patrimonio?

En Sarmiento de Gamboa, el relato de la expansión incaica se desarrolla dentro de un marco de monótona y abrumadora crueldad, « Con esta expedición y mandato partió *Cápac Yupanqui* del Cuzco e iba arruinando todas las provincias que de su voluntad no se le daban » (2). Y así, sin que varíe en un ápice el matiz de su adjetivación, los capitanes cuzqueños emprenden y llevan a término sus conquistas, destruyendo con muertes y con fuego cuando se les hace resistencia, robando y saqueando cuando se les avasallan de voluntad.

« No embargante que en muchos lugares se dieron grandes batallas...», dice Cieza demostrando así lo imparcial y ecuánime de su juicio. Derecho sobrado nos asistiría de sopechar de su testimonio si en su crónica la conquista se desenvolviera en los suaves términos de Garcilaso. Muy al contrario, los incas de Cieza, saben a las veces, ser crueles y despiadados, pero no lo son todos ni siempre.

Bien cruenta es la conquista que realizó *Inca Yupanqui* para meter bajo su señorío a los de *Ayavire,* «...donde dicen que no queriendo venir los naturales dél en coformidad, tuvo cuenta como, tomándolos descuidados, mató a todos sus vecinos, hombres y mujeres, haciendo lo mismo de los de *Copacopa;* y la destrucción de *Ayavire* fué tanta, que todos los más perecieron, que no quedaron sino algunos que después quedaban asombrados de tan grande maldad y como locos furiosos por las sementeras, llamando a los mayores su-

(1) Cieza, *ibíd.*, XVII, 61 y 62.

(2) Sarmiento de Gamboa, *ibíd.*, 58.

yos con grandes aullidos y palabras temerosas» (1). Como se advierte, no todas las conquistas que relata Cieza, se logran mediante dones y palabras, sino que algunas se realizan de manera sangrienta y enconada, y que el cronista no tiene la más pequeña intención de silenciar. Conquista no menos cruel, es la que realizó *Tupac Inca* para reducir a los de *Huarco,* que refugiados en una fortaleza, le resistieron durante varios años, hasta que, seducidos por falsas promesas, se desampararon de ella, y fueron exterminados implacablemente (2).

Sintetizando, pensamos en todo de acuerdo con Cieza, que si la crueldad fué empleada en la conquista incaica, lo fué como otro elemento cualquiera de dominio y de intimidación, procedimiento que no es ni fué extraño a ningún conquistador, y no como puede deducirse de la crónica de Sarmiento, la satisfacción de bajos instintos. La conquista así concebida, nunca hubiera llevado a los señoretes del *Cuzco* a ser los amos e Incas del enorme imperio que se extendía desde Quito hasta el Maule.

El conquistador no se contentaba con avasallar pueblos, su obra no se detenía en el campo de batalla, ni satisfacía sus ambiciones en el haber del vencido, Recién aquí comienza la verdadera conquista, la organización de todo orden de cosas de acuerdo a sus principios, la unificación política, social y económica, que imponían quienes se aprestaban a ser los señores definitivos de las nuevas tierras. Vulgares salteadores no se hubieran ocupado en fundar colonias, mover mitimaes, construir carreteras, y en levantar *tambos* y depósitos a su vera. Creer esto sería dudar de la conquista romana, acabado modelo en su género, con la cual hallaremos más de una similitud.

CAPITULO SEGUNDO

La organización política y económica de la conquista

Debimos haber manifestado en la Advertencia, que no aplicaríamos en mucho nuestra atención a la organización política de la conquista, como así también a la económica, porque son estos, temas que requieren más grave y extenso tratamiento y porque, al ser idénticas al de todo el imperio, no son propias ni características de la

(1) Cieza, *ibíd.*, LII, 197.
(2) Cieza, *ibíd.*, LIX, 226.

conquista. Dentro del tema, lo que para nuestros propósitos adquiere mayor trascendencia, es el respeto que observaba el conquistador hacia la autoridad del Señor dominado. « Los señoríos nunca los tiraban a los naturales...» (1), afirma Cieza; expresión que en términos semejantes itera en muchas partes de la obra. Aparte de Garcilaso (2), el padre Bernabé Cobo confirma tal noticia diciendo que «..desde los *Hunus* para abajo eran los Señores y caciques que los Incas hallaron en las provincias cuando las conquistaron ». (3)

Por su parte Sarmiento de Gamboa, fuerza es referirnos nuevamente a él, y para impugnarle, dice que el conquistador acababa con los señores naturales o *cinches,* para imponer sus *curacas* y tiranizar más a su albedrío (4).

No han de ser nuestras palabras las que exalten y pongan de relieve la habilidad política que trasunta esta medida, sino la de Cieza, a cuya penetración no escapó la verdadera eficacia de esta actitud de concordia entre vencedor y vencido. « Y tuvieron —dice — otro aviso para no ser aborrecidos de los naturales: que nunca quitaron el señorío a los que les venía de herencia y eran naturales. Y si por ventura alguno cometía delicto o se hallaba culpado de tal manera que mereciese ser privado del señorío que tenía, daban y encomendaban el cacicazgo a sus hijos y hermanos...» (5).

Esta última noticia sobre la herencia del señorío, confírmala Garcilaso, la cual recojemos con ciertas reservas, por no ser muy explícita, no así con la del padre Cobo que dice muy claramente: « En la sucesión de los cacicazgos y Señoríos guardaba el Inca este orden: que si el hijo mayor era hábil y capaz para el cacicazgo de su padre, lo nombraban en él... y si el mayor no era hábil y lo era el segundo, se le daba a éste; y faltando hijos hábiles de edad sucedía el hermano del muerto y tenía el señorío mientras vivía » (6).

Sobre estos jerarcas naturales, imponía el Inca la autoridad de sus gobernadores, virreyes y la suya propia.

Renunciamos desde ya a analizar el grado de autoridad efectiva de estos señores naturales, o si eran tan sólo pasivos instrumentos de gobierno, manejados a voluntad por estos incas que ya se nos

(1) Cieza, *ibíd.*, XVII, 62.
(2) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XII, 78.
(3) Bernabé Cobo, *ibíd.*, t. 3º, XXV, 235.
(4) Sarmiento de Gamboa, *ibíd.*, 74.
(5) Cieza, « La Crónica...», XLI, 131.
(6) Cobo, *ibíd.*, t. 3º, XXV, 235.

muestran como muy hábiles políticos. Inútil será hurgar la crónica de Cieza en busca de algo concreto sobre la naturaleza y grado de subordinación de unas autoridades a las otras, como tampoco se hallará nada que satisfaga sobre las decurias, centurias, etc., en que se dividía toda la población del antiguo Perú, divisiones que sólo menciona hablando de la organización del ejército incaico.

Aunque es nuestro propósito dar una visión lo más exacta posible, según la describe Cieza, nos vemos obligados, para salvar las lagunas que presenta su información, y por dar a este capítulo una cierta unidad, a transcribir algunos párrafos del padre Cobo, que en pocas palabras resume lo que en Garcilaso lleva un capítulo. « Entre estos gobernadores y caciques había muy grande subordinación, porque los cinco decuriones de a diez sùbditos estaban sujetos al de cincuenta , y dos destos al de ciento y por esta orden los menores a los mayores hasta el más principal e inmediato al Rey » (1).

En cuanto a los gobernadores que imponía el Inca como autoridad suprema en las tierras conquistadas, eran todos orejones «...los más sabios, entendidos y esforzados que hallarse podían y ninguno tan mancebo que ya no estuviese en el postrer tercio de su edad ». (2) Su poder era casi absoluto y tenía facultad para levantar ejércitos y castigar cualquiera sublevación. Los *mitimaes* guerreros, de quienes hablaremos más tarde, dependían de él, y a no dudarlo, serían un arma preciosa en sus manos, a fuer de aguerrida y disciplinada. En punto a la fidelidad de estos gobernadores, diremos que estaba garantida por su hacienda y tal vez por la vida de sus familiares, que residían en el *Cuzco* o en lugares aledaños. Esto, aunque no lo dice el cronista de manera expresa, creemos deducirlo de una cláusula incompleta cuyo sentido reconstruímos. El párrafo en cuestión, es el siguiente: «...porque estos gobernadores que se ponían eran de gran confianza y todos orejones y que los màs de ellos tenían sus chácaras, que son heredades, en la comarca del Cuzco, y sus casas y parientes; y si alguno no sabía bastante para gobernar lo que tenía a su cargo, luego le era quitado el mando y puesto otro en su lugar » (3). Nosotros conjeturamos, con todas las reservas que imponen la carencia de noticias que confirmen nuestra suposisión, que resultaría ocioso el mencionar que tenían sus casas y familias en el *Cuzco,* si el autor no hubiera querido significar con ello que

(1) Cobo, *ibíd.*, t. 3º, XXV, 233.
(2) Cieza, « Segunda Parte...», XIII, 45.
(3) Cieza, *ibíd.*, XX, 75.

esa era una de las circunstancias por la cual se acendraría la fidelidad y celo de los gobernantes hacia el Inca (1).

Impuesto así en los nuevos territorios su orden político, en todo idéntico al que ya imperaba en el reino, atendíase a su organización económica. Como la consideración de este tema, recuérdese que sólo tratamos la conquista incaica en lo que ella tiene de particular, nos obligaría a comentar asuntos de tanto interés y tan debatidos como la propiedad, los tributos, las cargas personales, y en un plano más amplio, su organización comunista, optamos por dar de ellos una fugaz reseña, procurando que por incompleta no resulte falsa.

El eje del nuevo orden económico, íntimamente ligado al social por razones genéticas, común a todo el imperio y a todos los individuos, excepción hecha de la clase dominante u orejones y de los dignatarios, eran los censos, cuyos guarismos se asentaban en los *quipos*, el maravilloso elemento del mundo incaico. El censo o empadronamiento de la población era una de las primeras providencias que obligaba el conquistador, cuando menos así lo afirma el padre Blas Valera, según cita que extraemos de Garcilaso, « Demás desto mandaban que todos los naturales y moradores de la tal provincia se contasen y empadronasen hasta los niños por sus edades, linajes, oficios, haciendas, familias, que todo se notase y asentase como por escrito en los hilos de diversos colores; para que después conforme a aquellas condiciones se les impusiese la carga del tributo y las demás obligaciones que a las cosas y obras públicas tenían ». (2) Merced a esta cita no escapará a la percepción de nadie la importancia que adquiere el censo dentro de la economía incaica, ni se nos tachará de atrevidos al constituirle en su mismo eje.

Todos estos y otros muchos oficios de los *quipos* conoció Cieza. Supo de su utilidad en el reclutamiento del ejército, en la cuenta de los ganados, de las minas, de los mineros, sin olvidar su tan decantada utilidad histórica; y en fin, que conoció y supo que por ellos se llevaba cuenta ajustada y fiel de cuantos recursos naturales existían en las provincias del *Tahuantinsuyu*.

(Continuará)

(1) Hemos afirmado más arriba que carecíamos de noticias que confirmaran nuestra conjetura, pero creemos que mucho nos precipitamos, olvidando que el mismo Garcilaso (*ibíd.*, t. 2º, XXXIII, 274) afirma que el castigo a los traidores y al violador de las vírgenes del Sol, se extendía hasta su parentela y aún a todo el pueblo al cual pertenecía.

(2) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XIII, 85 y 86.